Exercice 2

Polygones de PICK
Eléments de correction

Partie I : Etude de quelques polygones de PICK

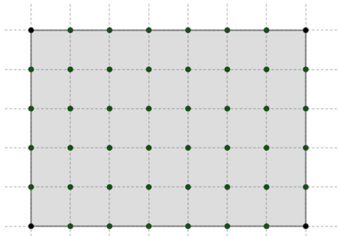


Figure 1 – questions 1

Questions 1 : le cas d'un rectangle de PICK

Q 1-a : $i = 24 \quad b = 24 \quad A = 35.$
Q 1-b : $i + \frac{b}{2} - 1 = 24 + \frac{24}{2} - 1 = 35.$ On constate que $i + \frac{b}{2} - 1 = A$.

Questions 2 : le cas des rectangles de PICK

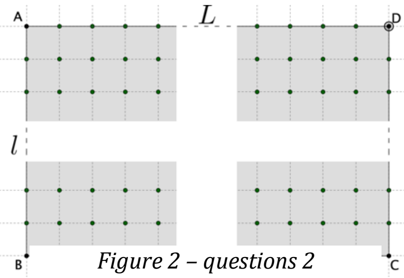


Figure 2 – questions 2

Q 2-a : $[AD]$ compte $L + 1$ points du réseau.
Q 2-b : $b_R = Périmètre_{ABCD} = 2L + 2l$ et $i_R = (L-1)(l-1)$.
Q 2-c : $i_R + \frac{b_R}{2} - 1$

$$= (L-1)(l-1) + \frac{2L+2l}{2} - 1$$

$$= Ll - l - L + 1 + L + l - 1$$

$$= Ll$$

$$= A$$

Questions 3 : le cas d'un triangle rectangle de PICK

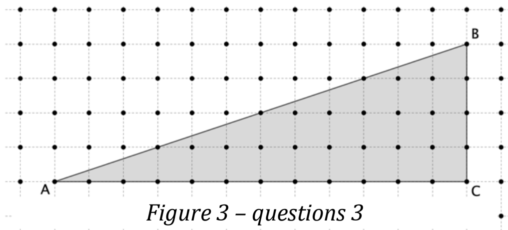


Figure 3 – questions 3

Q 3-a : $i = 15 \quad b = 20 \quad A = \frac{12 \times 4}{2} = 24.$
Q 3-b : $i + \frac{b}{2} - 1 = 15 + \frac{20}{2} - 1 = 24 = A.$

Questions 4 : le cas des triangles rectangles de PICK

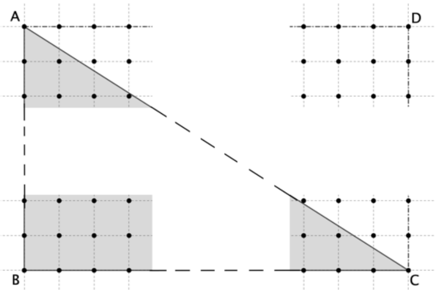


Figure 4 – questions 4

Q 4-a : Les triangles ABC et ADC sont superposables et leur union forme le rectangle $ABCD$. En décomposant $2b_T$, on commence bien par compter b_R.

Puis les points A et C ont été comptés 2 fois donc on ôte 2 pour ne les compter qu'une seule fois chacun.

Les points du segment $[AC]$ exceptés les points A et C ont été comptés 2 fois et il faut les ôter complètement. D'où le terme « $-2k$ ».

Finalement, on a bien $b_R = 2b_T - 2 - 2k$

Q 4-b : Avec un même raisonnement de décomposition, l'ensemble des points intérieurs du rectangle $ABCD$ est l'union des points intérieurs des triangles ABC et ADC ainsi que ceux « intérieurs » du segment $[AC]$. On a donc directement $i_R = 2i_T + k$.

Q 4-c : En déduire que l'aire A_T du triangle rectangle ABC vérifie $A_T = i_T + \frac{b_T}{2} - 1$

D'après Q 4-a, $b_R = 2b_T - 2 - 2k \quad \Leftrightarrow \quad b_T = \frac{b_R + 2 + 2k}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b_T}{2} = \frac{b_R}{4} + \frac{1}{2} + \frac{k}{2}$

D'après Q 4-b, $i_R = 2i_T + k \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{i_T} = \frac{i_R}{2} - \frac{k}{2}$

C'est pourquoi, $i_T + \frac{b_T}{2} - 1$

$$= \frac{i_R}{2} - \frac{k}{2} + \frac{b_R}{4} + \frac{1}{2} + \frac{k}{2} - 1$$

$$= \frac{i_R + \frac{b_R}{2} - 1}{2}$$

$$= \frac{A}{2} \text{ (d'après Q 2 − c)}$$

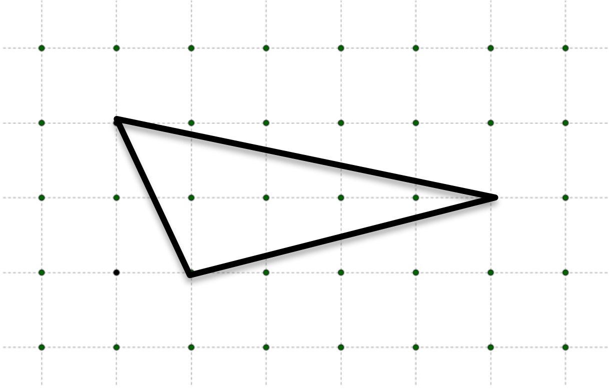
$$= A_T$$

Questions 5 : le cas de points intérieurs alignés dans un polygone de PICK

Q 5-a : $i = 4 \quad b = 4 \quad A = \frac{b \times h}{2} = \frac{2\times 5}{2} = 5$..

Q 5-b : $i + \frac{b}{2} - 1 = 4 + \frac{4}{2} - 1 = 5$. On a encore $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

Q 5-c : Sur l'annexe 2, tracer un polygone de PICK avec $i = 4$ et $b = 3$.



Partie II : formule de PICK pour un polygone constitué de deux triangles rectangles de PICK

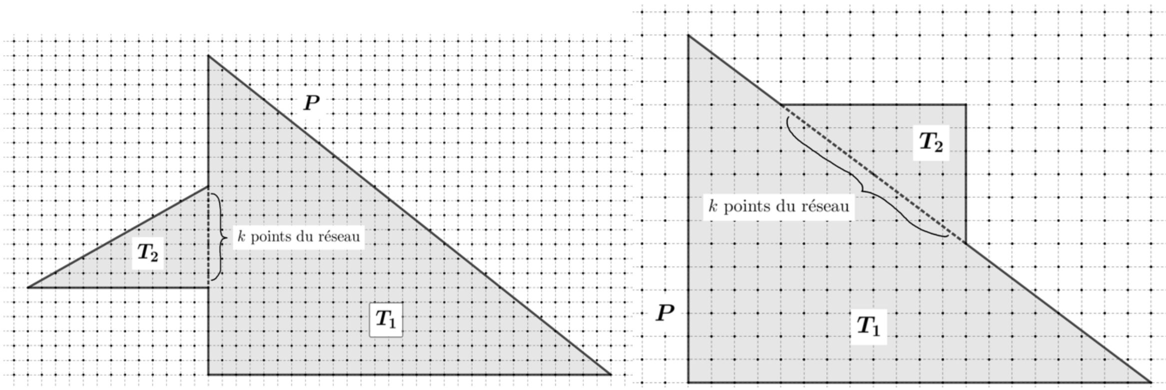


Figure 5

On note k le nombre de points du réseau sur le segment commun à T_1 et T_2, exceptées ses extrémités.

Q 6 : Même raisonnement qu'en question 4 : $i = i_1 + i_2 + k$

Q 7 : Même raisonnement qu'en question 4 : $b = b_1 + b_2 - 2k - 2$

Q 8 : $A = A_1 + A_2$

Q 9 : $i + \frac{b}{2} - 1 = i_1 + i_2 + k + \frac{b_1 + b_2 - 2k - 2}{2} - 1 = \left(i_1 + \frac{b_1}{2} - 1\right) + \left(i_2 + \frac{b_2}{2} - 1\right) = A_1 + A_2 = A$

Partie III : formule de PICK pour un polygone de PICK quelconque

Q 10 : En traçant la diagonale du rectangle, on obtient alors 3 triangles de PICK juxtaposables. On applique donc la conservation de la formule de PICK (partie 2) à ces 3 triangles (2 à 2) et elle reste valable.

Q 11 : le polygone de PICK en annexe 3 est décomposable en juxtapositions de rectangles et triangles rectangles de PICK. D'après la Q 10, la formule de PICK reste valable. Donc on compte :

$$i = 272 \quad b = 74$$

Et on a :

$$A = i + \frac{b}{2} - 1 = 272 + \frac{74}{2} - 1 = 308$$

Exercice 1

L'ALGORITHME DE KAPREKAR

Dans cet exercice, les parties sont dépendantes.

Définitions et exemples

Notations

- Un nombre entier non nul à p chiffres est noté $n = \overline{a_{p-1} \cdots a_1 a_0}$ où a_0 est le chiffre des unités, a_1 le chiffre des dizaines etc… et $a_{p-1} \neq 0$.
- n se décompose en base 10 sous la forme $\boldsymbol{n = \overline{a_{p-1} \cdots a_1 a_0} = a_{p-1}} \times \mathbf{10^{p-1}} + \cdots + \boldsymbol{a_1} \times \mathbf{10^1} + \boldsymbol{a_0}$**.**

Exemple : $n = \overline{506} = 5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 6$ (habituellement noté 506)

Définitions

- Etant donné un entier naturel n non nul,
  - $\boldsymbol{c(n)}$ est le nombre construit en ordonnant les chiffres du nombre n dans l'ordre croissant.
  - $\boldsymbol{d(n)}$ est le nombre construit en ordonnant les chiffres du nombre n dans l'ordre décroissant.

Exemple : $c(506) = 056 = 56$ *et* $d(506) = 650$

- On considère la **fonction $\boldsymbol{K}$** définie sur $\mathbb{N}^*$ par $K(n) = d(n) - c\,(n)$

Exemple : $K(506) = d(506) - c(506) = 650 - 56 = 594$

Procédé détaillant l'algorithme de Kaprekar :

Dattatreya Ramachandra Kaprekar est un mathématicien indien (1905-1988)

L'algorithme de Kaprekar consiste à répéter l'application de la fonction K :

$$n \mapsto K(n) = n_1 \mapsto K(n_1) = n_2 \mapsto K(n_2) = n_3 \mapsto \cdots$$

L'algorithme s'arrête s'il aboutit à 0 ou à un nombre n_k tel que $n_k = K(n_k)$.
Une telle valeur n_k est appelée **point fixe** de l'algorithme de Kaprekar.

Exemple

En partant du nombre $n = 5\,294$, on obtient $n_1 = \mathrm{K}(5\,294) = 9\,542 - 2\,459 = 7\,083$.
En réappliquant la fonction K, on obtient : $n_2 = K(7\,083) = 8\,730 - 378 = 8\,352$.
Puis, $n_3 = \mathrm{K}(8\,352) = 6\,174$, etc.
On peut noter : $5294 \mapsto K(5294) = 7083 \mapsto K(7083) = 8352 \mapsto K(8352) = 6174 \mapsto \cdots$

Questions préliminaires

<u>Q 1</u> : Justifier que 2 nombres dont les chiffres sont les mêmes à l'ordre près (comme 623 et 236, par exemple) possèdent la même image par la fonction de Kaprekar.

Correction : d(623)=d(236)=632 et c(623)=c(236)=236 donc K(623)=K(236)=632-236=396. Il en est de même pout tout autre entier.

Dans certaines questions de ce sujet, on pourra donc, indifféremment, calculer l'image par K de n ou $d(n)$.

<u>Q 2</u> : Combien d'étapes sont nécessaires pour que l'algorithme de Kaprekar s'arrête si on l'applique à un nombre entier compris entre 1 et 9 ?

Correction : On a dans tous ces cas K(n)=0 en une étape et l'algorithme s'arrête.

Partie I – Entiers naturels à deux chiffres : entre 10 et 99

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'algorithme de Kaprekar et son éventuel arrêt pour les nombres à 2 chiffres.

<u>Q 3</u> : Appliquer l'algorithme de Kaprekar à 53.

Correction : En appliquant l'algorithme de Kaprekar à 53*, on obtient la liste :*

$$53, 18, 63, 27, 45, 9, 0.$$

<u>Q 4</u> : Choisir un entier naturel à deux chiffres distincts et lui appliquer l'algorithme de Kaprekar.

Correction : En fonction du choix du candidat.

<u>Questions 5 : Etude de l'arrêt de l'algorithme</u>

<u>Q 5-a</u> : Montrer que, pour tout entier naturel n à deux chiffres, la première étape de l'algorithme aboutit à un nombre $n_1 = K(n)$, multiple de 9.

Correction : Considérons un entier naturel n *dont les deux chiffres sont* a *et* b*.*
Comme $K(\overline{ab}) = K(\overline{ba})$*, on peut supposer que* $a \geq b$ *; il vient alors*

$$n_1 = K(n) = \overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9(a - b).$$

Par conséquent, $n_1 = K(n)$ *est un multiple de* 9 *qui prend une valeur entre 0 et 81, car* $0 \leq a - b \leq 9$.

<u>Q 5-b</u> : A quels entiers naturels à deux chiffres peut-on réduire l'étude de l'arrêt de l'algorithme de Kaprekar ?

Correction : On peut donc réduire l'étude aux multiples de 9 *entre 18 et 81, voire aux multiples de 9 dont les chiffres sont classés dans l'ordre décroissant, 81-72-63-54.*

Q 5-c : Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête toujours lorsqu'on l'applique à un entier naturel à deux chiffres.

Correction : D'après la question précédente et la question préliminaire, on peut réduire l'étude aux multiples de 9 à deux chiffres, dont voici la liste : $18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81$.

Par suite, on a :

Pour 81 $(et\ 18)$*:* $63, 27, 45, 9, 0$.

Pour 72 $(et\ 27)$*:* $45, 9, 0$.

Pour 63 $(et\ 36)$*:* $27, 45, 9, 0$.

Pour 54 $(et\ 45)$ *:* $9, 0$.

Deux cas sont donc possibles :

- *Soit* n_1 *est à 1 seul chiffre et l'algorithme s'arrête à* $n_2 = 0$
- *Soit* n_1 *est à 2 chiffres, alors* n_2 *est un multiple de 9 à 1 ou 2 chiffres et l'algorithme s'arrête sur la valeur 0.*

Bilan : Pour n à 2 chiffres, dans tous les cas, l'algorithme s'arrête sur la valeur 0.

Partie II – Entiers naturels à trois chiffres : entre 100 et 999

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'algorithme de Kaprekar et son éventuel arrêt pour les nombres à 3 chiffres.

Q 6 : Choisir un entier naturel à trois chiffres et lui appliquer l'algorithme de Kaprekar. S'arrête-t-il sur un point fixe ?

Correction : En fonction du choix du candidat.

Q 7 : Soit $n = \overline{abc}$ un nombre à trois chiffres. D'après la remarque de la question 1), on considère $a \geq b \geq c$. Montrer que $n_1 = K(n) = 99(a - c)$, avec $0 \leq a - c \leq 9$.

Correction : K(n)=100a+10b+c-100c-10b-a=99(a-c) avec $1 \leq a \leq 9$ *;* $0 \leq c \leq 9$ *et* $a \geq c$

On a donc n_1 *multiple de 99 donc* $n_1 = 0$ *ou 99 ou* n_1 *est à 3 chiffres.*

Questions 8 : Etude de l'arrêt de l'algorithme lorsque $n_1 = 0$

Q 8-a : Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête dans ces cas.

Correction : Si $n_1 = 0$*, l'algorithme s'est déjà arrêté.*

Q 8-b : Déterminer la liste des entiers $n = \overline{abc}$ avec $a \geq b \geq c$ pour lesquels $n_1 = K(n) = 0$.

Correction : Lorsque a-c=0, soit a=b=c selon l'ordre décroissant et alors l'algorithme s'arrête à $n_1 = 0$

La liste est composée de 9 nombres : 111,222,333,444,555,666,777,888,999

Questions 9 : Etude de l'arrêt de l'algorithme lorsque $n_1 = 99$

Q 9-a : Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête dans ce cas.

Correction : Si $n_1 = 99$*, et alors* $K(n_1) = 0$*. L'algorithme s'arrête à* $n_2 = 0$*.*

Q 9-b : Déterminer la liste des entiers $n = \overline{abc}$ avec $a \geq b \geq c$ pour lesquels $n_1 = K(n) = 99$.

Correction : Il faut avoir a-c=1 et toujours a, b, c en ordre décroissant.

La liste est donc composée de 18 nombres :

100,110,211,221,322,332,433,443,544,554,655,665,766,776,877,887,988,998

Questions 10 : Etude de l'arrêt de l'algorithme lorsque n_1 s'écrit avec 3 chiffres

Q 10-a : Quelles sont les valeurs de n_1 possibles qui s'écrivent avec 3 chiffres ?

Correction : Ce sont les multiples de 99 à 3 chiffres soit 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 et 891. Mais pas a-c=10, qui est impossible car a≤9.

Q 10-b : Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête dans ces cas.

Correction : Par suite, on a :

Pour 198 *et* 981*:* $792, 693, 594, 495.$

Pour 297 *et* 792*:* $693, 594, 495.$

Pour 396 *et* 693 *:*$594, 495.$

Pour 495 *et* 594*:* $495.$

Dans tous ces cas, l'algorithme s'arrête sur la valeur 495.

Questions 11 : Cas d'arrêt de l'algorithme pour les entiers naturels à 3 chiffres

Q 11-a : Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête toujours dans le cas des entiers naturels à 3 chiffres.

Correction : D'après les questions Q7, Q8 et Q9, dans les trois seuls cas possibles portant sur n_1*, l'algorithme s'arrête.*

Q 11-b : Quand on leur applique l'algorithme de Kaprekar, combien d'entiers naturels à 3 chiffres ont 0 pour valeur d'arrêt ? Combien s'arrêtent sur un point fixe ? Quel(s) point(s) fixe(s) ?

Correction : si $n_1 = 0$*, l'algorithme s'arrête à la valeur* $n_1 = 0$ *pour 9 valeurs de n qui sont 111,222,333,444,555,666,777,888,999*

Si $n_1 = 99$*, l'algorithme s'arrête à la valeur* $n_2 = 0$ *pour 18 valeurs de n qui sont 100,110,211,221,322,332,433,443,544,554,655,665,766,776,877,887,988,998 ainsi que pour leurs permutations possibles, à savoir 101, 121, 112, 212, 122, 232, 223, 323,233, 343,334, 434, 344, 454, 445, 545, 455, 565, 556, 656, 566, 676, 667, 767, 677, 787, 778, 878, 788, 898, 889, 989, 899 soit 33 nombres supplémentaires.*

Si n_1 *est à 3 chiffres, l'algorithme s'arrête à la valeur 495 (pour les 900-9-18-33=840 autres valeurs de n entre 100 et 999)*

Partie III – Entiers naturels à quatre chiffres : entre 1000 et 9999

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'algorithme de Kaprekar et son éventuel arrêt pour les nombres à 4 chiffres.

On considère maintenant un entier à 4 chiffres $n = \overline{abcd}$. D'après la remarque de la question 1), on peut supposer que $a \geq b \geq c \geq d$.

Q 12 : Montrer que l'on a l'inégalité $0 \leq b - c \leq a - d$.

Correction : $b \leq a$ *et* $-c \leq -d$ *puis somme des inégalités*

Q 13 : Montrer que $n_1 = K(n) = 999(a-d) + 90(b-c)$. Justifier que n_1 est multiple de 9.

Correction : $K(n) = 1000a + 100b + 10c + c - 1000d - 100c - 10b - a = 999(a-d) + 90(b-c) = 9 * [111(a-d) + 10(b-c)]$ *cqfd*

Dans les questions suivantes, l'action de l'algorithme de Kaprekar est étudiée en distinguant ces entiers à 4 chiffres selon les valeurs des différences $a - d$ et $b - c$.

Questions 14 : On suppose, dans cette question, que $a - d = 0$.

Q 14-a : Que vaut $n_1 = K(n)$ dans ce(s) cas ?

*Correction :Si a=d, alors b=c et alors n_1 =K(n)=999*0+90*0= 0*

Q 14-b : Quels sont les nombres n à 4 chiffres concernés par la condition $a - d = 0$?

Correction : On a a=b=c=d donc:

$n = 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888$ *ou* 9999.

Questions 15 : On suppose, dans cette question, que $a - d = 1$.

Q 15-a : Déterminer les deux valeurs possibles pour $n_1 = K(n)$.

Correction : avec $b - c = 0$, puis $b - c = 1$, on obtient $K(n) = 999$ ou 1089.

Q 15-b : Appliquer l'algorithme de Kaprekar à ces 2 valeurs.

Correction : $K(999) = 0$ *et* $K(1089) = 9621$ *puis* $K(9621) = 8352$ *puis* $K(8352) = 6174$ *puis* $K(6174) = 6174$. *L'algorithme s'arrête sur 0 pour 999, et sur 6174 pour 1089.*

Q 15-c : Quels sont les nombres à 4 chiffres pour lesquels $n_1 = K(n) = 999$?

Correction :Avec b-c=0, on a $n = 1000, 1110, 2111, 2221, 3222, 3332, 4333, 4443, 5444, 5554, 6555, 6665, 7666, 7776, 8777, 8887, 9888, 9998$. *Soit au total 18 nombres.*

Questions 16 : On suppose, dans cette question, que $a - d \geq 2$.

On considère le tableau suivant qui fait apparaître les différentes valeurs possibles de $n_1 = K(n)$.

$b-c$ \ $a-d$	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1998	2997	3996	4995	5994	6993	7992	8991
1	2088	3087	4086	5085	6084	7083	8082	9081
2	2178	3177	4176	5175	6174	7173	8172	9171
3	X	3267	4266	5265	6264	7263	8262	9261
4	X	X	4356	5355	6354	7353	8352	9351
5	X	X	X	5445	6444	7443	8442	9441
6	X	X	X	X	6534	7533	8532	9531
7	X	X	X	X	X	7623	8622	9621
8	X	X	X	X	X	X	8712	9711
9	X	X	X	X	X	X	X	9801

Q 16-a : Justifier la présence de cases « impossibles » dans le tableau, notées X.

Correction : On doit avoir $b - c \leq a - d$.

Q 16-b : Compléter le tableau.

Correction : Voir le tableau complété en rouge

Questions 17 : L'arbre de Kaprekar

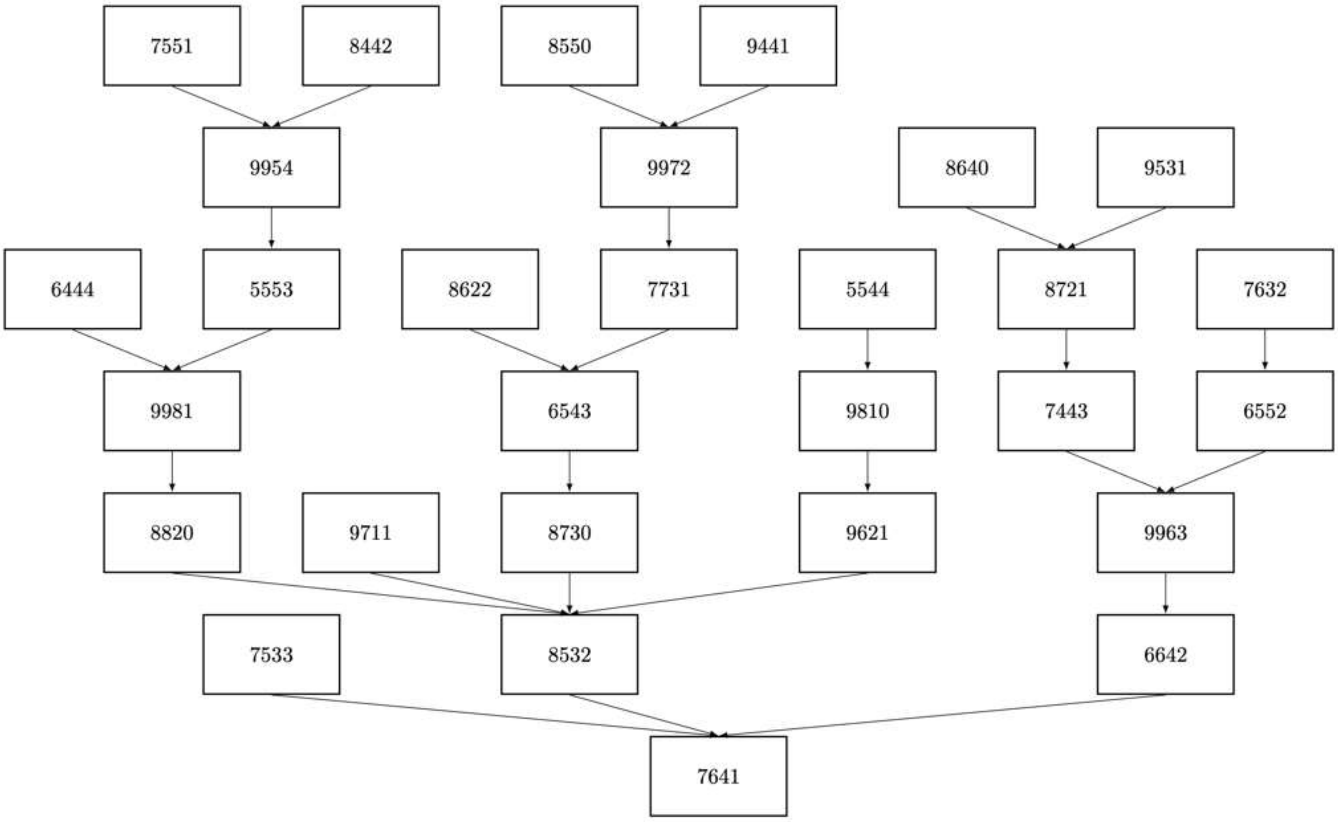
Dans l'arbre de Kaprekar (en annexe), les nombres sont remplacés par leurs versions « ordonnées décroissantes » :

- chaque flèche représente l'application de la fonction K,
- dans chaque case, comme l'algorithme de Kaprekar est insensible à l'ordre des chiffres d'un nombre donné, on écrit $d(n)$ pour représenter tous les entiers n ayant les mêmes chiffres à l'ordre près.

Q 17-a : Ecrire en version « ordonnée décroissante » toutes les possibilités de $n_1 = K(n)$ à 4 chiffres. En dresser la liste dans l'ordre croissant.

Correction : D'après le tableau, la liste est 9981, 9972, 9963, 9954, 9810, 9711, 9621, 9531, 9441, 8820, 8730, 8721, 8640, 8622, 8550, 8532, 8442, 7731, 7641, 7632, 7551,7533, 7443, 6642, 6552, 6543, 6444, 5553, 5544.

<u>Q 17-b</u> : Sur la feuille annexe, compléter l'arbre de KAPREKAR, où certaines des valeurs de $n_1 = K(n)$ ont été positionnées.



<u>Q 17-c</u> : Appliquer l'algorithme de Kaprekar au dernier nombre au bas de l'arbre de Kaprekar.

Correction : K(7641)=6174 qui est donc un point fixe de l'algorithme.

<u>Q 18</u> : Quels sont le(s) point(s) fixe(s) possible(s) de l'algorithme de Kaprekar pour les nombres à 4 chiffres ? Combien de nombres à 4 chiffres aboutissent à 0 ? Combien aboutissent à chacun de ce(s) point(s) fixe(s) ?

Correction : Lorsque a-d=0, l'algorithme s'arrête sur 0 pour 9 nombres (voir Q14)

Lorsque a-d=1, soit $n_1 = 999$, l'algorithme s'arrête sur 0 pour 18 nombres.

Et pour leurs 66 permutations possibles.

soit $n_1 = 1089$ et l'étude se ramène au cas suivant

Dans tous les autres cas sur la valeur de (a-d), n_1 peut prendre 29 valeurs distinctes en version "ordonnée décroissante" qui mènent toutes au point fixe 6174.

Bilan : L'algorithme s'arrête sur 0 pour 9+18+66=93 nombres

L'algorithme s'arrête sur 6174 pour les 9000-93=8907 autres nombres.