Région académique
HAUTS-DE-FRANCE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
*Liberté*
*Égalité*
*Fraternité*

# Olympiades Nationales de Mathématiques

-------------

## Académie de Lille

Mercredi 20 mars 2024 de 8h à 12h10

-------------

## Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, séparées d'une pause de dix minutes. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents : 8h et 10h10.**

La première partie, constituée des exercices nationaux, est réalisée individuellement.

À son issue, les copies sont ramassées et une pause de dix minutes est prévue.

La seconde partie, constituée des exercices académiques, est réalisée en binôme.

## Énoncés de la première partie de 08h00 à 10h00

**Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.**

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

**Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.**

# Première partie

de 08h00  à 10h00

Exercices nationaux

Travail individuel

Pause de 10h00 à 10h10

## Exercice 1

## PLUS FORT !

Dans cet exercice, toutes les questions et sous-questions sont, dans une large mesure, indépendantes. À partir de la question **7**, certaines montent crescendo en difficulté. Toutes les réponses devront être argumentées.

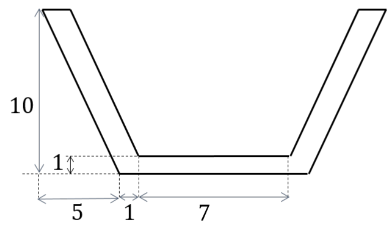
**1.** *Pourcentages pour tous les âges.*
***a.*** Est-il exact que pour tous nombres réels positifs $x$ et $y$, $x$ % de $y$ euros valent $y$ % de $x$ euros ? En déduire sans calcul compliqué ce que valent 32 % de 25 euros.
***b.*** Est-il exact que, pendant les soldes, après 4 baisses consécutives de 25 %, un article devient gratuit ?
***c.*** On passe d'un prix HT (hors taxe) à un prix TTC (toutes taxes comprises) en augmentant le prix HT de 20 %. Si le prix TTC d'un article est 2 fois plus élevé dans un magasin que dans un autre, le prix HT l'est-il aussi ?

**2.** *Double sens.* Donner deux reformulations très différentes à la question « Quel nombre donne 51 quand on le multiplie par 0,01 ? » pour en lever l'ambiguïté, et apporter les deux réponses très différentes possibles.

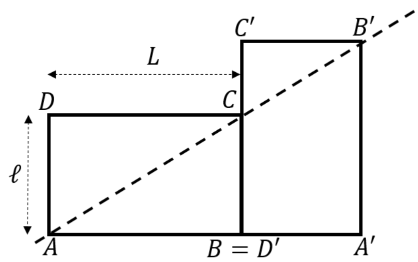
**3.** *Le secret pour avoir* $20/20$. Un sujet d'examen, noté sur 20, comprend un exercice noté sur 5 et un problème, noté sur 15. Un candidat reçoit la note de 4 sur 5 à l'exercice et de 3 sur 15 au problème. Quelle est sa note sur 20 ? Pourtant, le calcul fractionnaire démontre que $\frac{4}{5}+\frac{3}{15}=\frac{20}{20}$ (résultat à justifier). Avancez une raison à ce paradoxe et démontrer, dans le même contexte d'un exercice sur 5 et d'un problème sur 15, que le second calcul donne toujours un meilleur résultat que le premier.

**4.** *Trouver l'intrus.* On dispose d'une balance à deux plateaux comme sur la figure ci-contre. Soient 5 oranges indiscernables au toucher et à la vue ; 4 ont exactement le même poids et 1 est un peu moins lourde. Proposer un protocole permettant, en 2 pesées au maximum, de détecter l'orange la moins lourde. Soient maintenant 2 024 oranges indiscernables au toucher et à la vue ; 2 023 ont exactement le même poids et 1 est un peu moins lourde. Proposer un protocole permettant, en 10 pesées au maximum, de détecter l'orange la moins lourde.

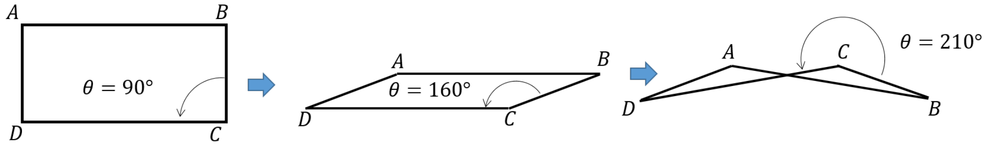
**5.** *Tchin !* Un verre est représenté en coupe méridienne (unité en cm ; l a figure n'est pas à l'échelle ; les parois intérieures et extérieures sont parallèles). On y empile un second verre, du même modèle. À quelle hauteur s'élève l'ensemble ? On accompagnera sa rédaction d'un croquis.




**6.** *Le début de la richesse.* Deux rectangles $ABCD$ et $A'B'C'D'$ identiques de largeur $\ell$ et de longueur $L > \ell$ sont juxtaposés comme sur la figure ci-contre, où le premier est posé horizontalement et le second dressé verticalement. Montrer que les points $ACB'$ sont alignés quand $\frac{L}{\ell}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
(Après l'épreuve, essayez avec deux rectangles au format CB (« carte bleue »), vous verrez, cela fonctionne !)

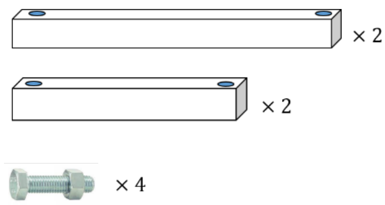


**7.** *Quelle forme !?* Un rectangle $ABCD$ est articulé en ses quatre sommets. Il peut donc se déformer en parallélogramme, puis en contre-parallélogramme en jouant sur l'ouverture $\theta = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right)$ comme ci-dessous.

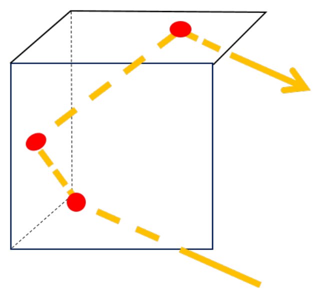



Dessiner les configurations obtenues quand les angles mesurent successivement $\theta = 120°$, puis $\theta = 180°$ puis $\theta = 225°$. On laissera apparents les traits de construction et on choisira $DC$ trois fois plus grand que $AD$.

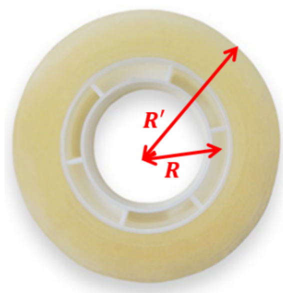
On dispose ensuite de quatre barrettes parallélépipédiques (percées en leurs extrémités) : deux longues et deux courtes (trois fois plus petites que les longues), et de quatre boulons (un boulon est composé d'une vis et d'un écrou). Dessiner en perspective les assemblages possibles vous permettant de fabriquer un parallélogramme articulé avec ces fournitures. Cependant, quel est le seul assemblage laissant le mécanisme se déformer jusqu'au contre-parallélogramme ?




**8.** *Rien que pour vos yeux.* Un coin de cube est constitué de trois miroirs perpendiculaires. En général, un rayon incident qui vient frapper l'un des miroirs est ensuite réfléchi sur les deux autres avant de repartir. Par exemple, sur le dessin en regard, le rayon lumineux rebondit trois fois : il frappe d'abord la face avant, puis la face latérale gauche, puis la face supérieure.
Expliquer pourquoi le rayon qui repart est alors parallèle au rayon qui arrivait.
En déduire l'intérêt d'un tel dispositif pour fabriquer les catadioptres situés à l'arrière des bicyclettes et des automobiles.



**9.** Un rouleau de bande adhésive a pour rayon intérieur $R = 1{,}8$ cm et pour rayon extérieur $R' = 2{,}6$ cm. La bande adhésive mesure 25 m de long. Déterminer le plus précisément possible son épaisseur.




**10.** Un tableau de $n$ lignes et $p$ colonnes contient des nombres réels. On réarrange chaque ligne de gauche à droite dans l'ordre croissant, puis chaque colonne de bas en haut dans l'ordre croissant comme sur l'exemple ci-contre (où $n = 3$ et $p = 5$).
Démontrer qu'à l'issue de cette seconde opération chaque ligne demeure bien classée, toujours dans l'ordre croissant de gauche à droite donc.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 3 | 4 | 8 |
| 0 | 9 | 2 | 7 | 14 |
| 20 | 3 | 7 | 7 | 7 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 8 | 8 |
| 0 | 2 | 7 | 9 | 14 |
| 3 | 7 | 7 | 7 | 20 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 7 | 9 | 20 |
| 1 | 3 | 7 | 8 | 14 |
| 0 | 2 | 4 | 7 | 8 |

# Exercice 2

*Pyramides de Pascal*

**1.** *Question préliminaire.* Rappeler pourquoi la somme $1 + 2 + \cdots + n$ des $n$ premiers entiers non nuls, avec $n \geq 1$, est égale à $n(n+1)/2$.

**Une *pyramide de Pascal*** est un tableau triangulaire composé d'entiers naturels et formé de la manière suivante : sa ligne du haut contient un nombre, la suivante deux nombres, etc. De plus, sur toutes les lignes sauf la dernière (celle du bas), chaque nombre doit être égal à la distance entre les deux nombres situés juste en dessous, l'un à sa gauche et l'autre à sa droite.

Ci-dessous est représentée, en quelques étapes, la construction d'un tel triangle ayant 4 lignes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \_ & & & \\ & & \_ & & \_ & & \\ & \_ & & \_ & & \_ & \\ 8 & & 4 & & 10 & & 7 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \_ & & & \\ & & \_ & & \_ & & \\ & 4 & & 6 & & 3 & \\ 8 & & 4 & & 10 & & 7 \end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & 4 & & 6 & & 3 & \\ 8 & & 4 & & 10 & & 7 \end{array}$$

**2.** *Quelques exemples*

***a.*** Construire la pyramide de Pascal à 4 lignes dont la dernière ligne est constituée, dans cet ordre d'exposition, des nombres entiers : 4, 3, 9 et 7 (4 est donc tout à gauche et 7 tout à droite).

***b.*** Construire une pyramide de Pascal à 3 lignes en utilisant exclusivement les nombres entiers 1, 2, 3.

**3.** *Nombre d'entiers dans une pyramide de Pascal*

***a.*** Combien de nombres (distincts ou pas) sont écrits dans une pyramide de Pascal à 3 lignes ? à 4 lignes ?

***b.*** Soit $n \geq 2$. Combien de nombres (distincts ou pas) sont écrits dans une pyramide de Pascal à $n$ lignes ?

Dans la suite, on dira qu'une pyramide de Pascal est *parfaite* si elle contient exactement une fois tous les entiers entre 1 et le nombre total d'entiers du triangle. Par exemple, cette pyramide de Pascal à 3 lignes est parfaite :

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & 3 & & 5 & \\ 4 & & 1 & & 6 \end{array}$$

**4.** Soit $n \geq 2$. Montrer que s'il existe une pyramide parfaite à $n$ lignes, alors le plus grand entier qu'elle possède est situé sur la ligne du bas. Quel est cet entier ?

**5.** Construire une pyramide de Pascal parfaite à 3 lignes dont le nombre 6 est situé en bas et au milieu.

**6.** L'objet de cette question est de montrer que dans une pyramide de Pascal parfaite à $n$ lignes, et sauf à avoir $n \leq 3$, le nombre $n(n+1)/2$ ne peut être situé ni en bas tout à droite, ni en bas tout à gauche.

***a.*** Justifier qu'il suffit d'établir qu'il ne peut être situé en bas tout à droite.

On suppose dans la suite que le nombre $n(n+1)/2$ est situé en bas tout à droite.

***b.*** On considère alors le chemin qui part du sommet de la pyramide et qui descend progressivement, en connectant le nombre atteint sur chaque ligne au plus grand des deux nombres de la ligne du dessous situés à sa gauche et à sa droite. Dans l'exemple en amont de la question **4** ce chemin serait $2 \to 5 \to 6$. Montrer que, dans le cas général, ce chemin ne peut emprunter que le bord droit de la pyramide et aboutir à $n(n+1)/2$.

***c.*** Conclure en envisageant le triangle équilatéral dont la base du dessous est composée des $n-2$ nombres les plus à gauche de la dernière ligne.

Région académique
HAUTS-DE-FRANCE

académie Lille

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

# Olympiades Nationales de Mathématiques

-------------

## Académie de Lille

Mercredi 20 mars 2024 de 8h à 12h10

-------------

## Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, séparées d'une pause de dix minutes. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents : 8h et 10h10.**

La première partie, constituée des exercices nationaux, est réalisée individuellement.

À son issue, les copies sont ramassées et une pause de dix minutes est prévue.

La seconde partie, constituée des exercices académiques, est réalisée en binôme.

## Énoncés de la seconde partie de 10h10 à 12h10

**Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.**

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

**Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.**

# Deuxième partie

de 10h10 à 12h10

Exercices académiques

Travail en binôme

## Exercice 1
## L'ALGORITHME DE KAPREKAR

**Dans cet exercice, les parties sont dépendantes.**

### Définitions et exemples

*Notations*

- Un nombre entier non nul à $p$ chiffres est noté $n = \overline{a_{p-1} \cdots a_1 a_0}$ où $a_0$ est le chiffre des unités, $a_1$ le chiffre des dizaines etc… et $a_{p-1} \neq 0$.
- $n$ se décompose en base 10 sous la forme $\boldsymbol{n = \overline{a_{p-1} \cdots a_1 a_0} = a_{p-1} \times 10^{p-1} + \cdots + a_1 \times 10^1 + a_0}$.

Exemple : $n = \overline{506} = 5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 6$ (habituellement noté 506)

*Définitions*

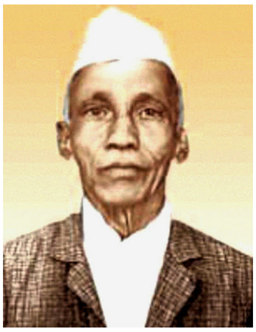
- Etant donné un entier naturel $n$ non nul,
  - $\boldsymbol{c(n)}$ est le nombre construit en ordonnant les chiffres du nombre $n$ dans l'ordre croissant.
  - $\boldsymbol{d(n)}$ est le nombre construit en ordonnant les chiffres du nombre $n$ dans l'ordre décroissant.

Exemple : $c(506) = 056 = 56$ et $d(506) = 650$

- On considère la **fonction $\boldsymbol{K}$** définie sur $\mathbb{N}^*$ par $K(n) = d(n) - c\ (n)$

Exemple : $K(506) = d(506) - c(506) = 650 - 56 = 594$

**Procédé détaillant l'algorithme de Kaprekar :**



Dattatreya Ramachandra Kaprekar, est un mathématicien indien (1905-1988)

**L'algorithme de Kaprekar** consiste à répéter l'application de la fonction $K$ :

$$n \mapsto K(n) = n_1 \mapsto K(n_1) = n_2 \mapsto K(n_2) = n_3 \mapsto \cdots$$

L'algorithme s'arrête s'il aboutit à 0 ou à un nombre $n_k$ non nul tel que $n_k = K\ (n_k)$.
Une telle valeur $n_k$ est appelée **point fixe** de l'algorithme de Kaprekar.

*Exemple*

En partant du nombre $n = 5\,294$, on obtient $n_1 = K\,(5\,294) = 9\,542 - 2\,459 = 7\,083$. En réappliquant la fonction $K$, on obtient : $n_2 = K(7\,083) = 8\,730 - 378 = 8\,352$.

Puis, $n_3 = K(8\,352) = 6\,174$, etc.

On peut noter : $5294 \mapsto K(5294) = 7083 \mapsto K(7083) = 8352 \mapsto K(8352) = 6174 \mapsto \cdots$

**Questions préliminaires**

**Q 1 :** Justifier que 2 nombres dont les chiffres sont les mêmes à l'ordre près (comme 623 et 236, par exemple) possèdent la même image par la fonction de Kaprekar.

Dans certaines questions de ce sujet, on pourra donc, indifféremment, calculer l'image par $K$ de $n$ ou de $d\ (n)$.

**Q 2 :** Combien d'étapes sont nécessaires pour que l'algorithme de Kaprekar s'arrête si on l'applique à un nombre entier compris entre 1 et 9 ?

**Partie I – Entiers naturels à deux chiffres : entre 10 et 99**

**Dans cette partie, on se propose d'étudier l'algorithme de Kaprekar et son éventuel arrêt pour les nombres à deux chiffres.**

**Q 3 :** Appliquer l'algorithme de Kaprekar à 53.

**Q 4 :** Choisir un entier naturel à deux chiffres distincts et lui appliquer l'algorithme de Kaprekar.

**Questions 5 : Etude de l'arrêt de l'algorithme**

**Q 5-a :** Montrer que, pour tout entier naturel $n$ à deux chiffres, la première étape de l'algorithme aboutit à un nombre $n_1 = K(n)$ multiple de 9.

**Q 5-b :** A quels entiers naturels à deux chiffres peut-on réduire l'étude de l'arrêt de l'algorithme de Kaprekar ?

**Q 5-c :** Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête toujours lorsqu'on l'applique à un entier naturel à deux chiffres.

**Partie II – Entiers naturels à trois chiffres : entre 100 et 999**

**Dans cette partie, on se propose d'étudier l'algorithme de Kaprekar et son éventuel arrêt pour les nombres à trois chiffres.**

**Q 6 :** Choisir un entier naturel à trois chiffres et lui appliquer l'algorithme de Kaprekar. S'arrête-t-il sur un point fixe ?

**Q 7 :** Soit $n = \overline{abc}$ un nombre à trois chiffres. D'après la remarque de la question Q1, on considère $a \geq b \geq c$. Montrer que $n_1 = K(n) = 99(a-c)$, avec $0 \leq a - c \leq 9$.
En déduire que : $n_1 = 0$, ou $n_1 = 99$, ou $n_1$ est à trois chiffres.

**Questions 8 : Etude de l'arrêt de l'algorithme lorsque $n_1 = 0$**

**Q 8-a :** Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête dans ces cas.

**Q 8-b :** Déterminer la liste des entiers $n = \overline{abc}$ avec $a \geq b \geq c$ pour lesquels $n_1 = K(n) = 0$.

**Questions 9 : Etude de l'arrêt de l'algorithme lorsque $n_1 = 99$**

**Q 9-a :** Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête dans ce cas.

**Q 9-b :** Déterminer la liste des entiers $n = \overline{abc}$ avec $a \geq b \geq c$ pour lesquels $n_1 = K(n) = 99$.

**Questions 10 : Etude de l'arrêt de l'algorithme lorsque $n_1$ s'écrit avec trois chiffres**

**Q 10-a :** Quelles sont les valeurs de $n_1$ possibles qui s'écrivent avec trois chiffres ?

**Q 10-b :** Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête dans ces cas.

**Questions 11 : Cas d'arrêt de l'algorithme pour les entiers naturels à trois chiffres**

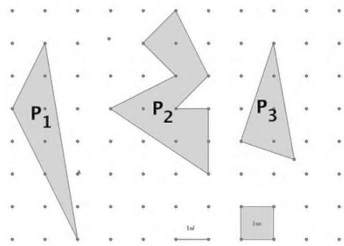
**Q 11-a :** Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête pour tout entier naturel à 3 chiffres.

**Q 11-b :** Quand on leur applique l'algorithme de Kaprekar, combien d'entiers naturels à trois chiffres ont 0 pour valeur d'arrêt ? Combien s'arrêtent sur un point fixe ? Quel(s) point(s) fixe(s) ?

# Exercice 2
# Polygones de PICK

**Dans tout le problème :**

- On note une unité de longueur $1\ u.l$ et l'une unité d'aire $1\ u.a$.
- On travaille dans un réseau pointé à maille carrée de côté 1.
- On appelle polygone de PICK, un polygone non aplati construit sur un tel réseau et dont chacun des sommets est un point du réseau.
- On note $i$ le nombre de points du réseau strictement intérieurs à ce polygone et $b$ le nombre de points du réseau sur le bord du polygone
- On note $A$ l'aire du polygone de PICK




Dans la figure ci-contre, les polygones $P_1$ et $P_2$ sont des polygones de PICK et le polygone $P_3$ ne l'est pas.

Pour le polygone $P_1$ on a $i = 3$ et $b = 4$, pour le polygone $P_2$ on a $i = 3$ et $b = 9$

## Partie I : Etude de quelques polygones de PICK

### <u>Questions 1 : le cas d'un rectangle de PICK</u>

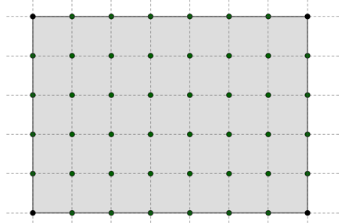


*Figure 1 – questions 1*

**<u>Q 1-a</u> :** Pour le rectangle de PICK de la figure 1 ci-contre, déterminer $i$, $b$ et $A$.

**<u>Q 1-b</u> :** Calculer $i + \frac{b}{2} - 1$. Que constate-t-on ?

### <u>Questions 2 : le cas des rectangles de PICK</u>

Soit $ABCD$ un rectangle de PICK de dimensions quelconques dont les côtés sont parallèles au réseau (comme dans la figure 2 ci-contre).
On note $L$ sa longueur et $l$ sa largeur.
Soient $b_R$ le nombre de points sur les bords du rectangle $ABCD$,
$i_R$ le nombre de ses points strictement intérieurs.

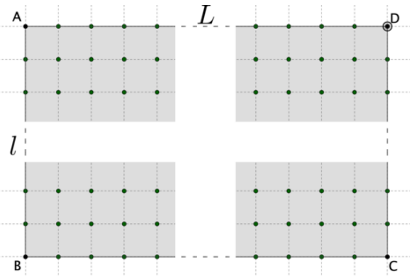



*Figure 2 – questions 2*

**<u>Q 2-a</u> :** Exprimer en fonction de $L$, le nombre de points sur le côté $[AD]$, extrémités comprises ?

**<u>Q 2-b</u> :** Exprimer $b_R$ et $i_R$ en fonction de $L$ et $l$.

**<u>Q 2-c</u> :** En déduire que l'aire $A_R$ du rectangle vérifie $A_R = i_R + \frac{b_R}{2} - 1$.

### <u>Questions 3 : le cas d'un triangle rectangle de PICK</u>

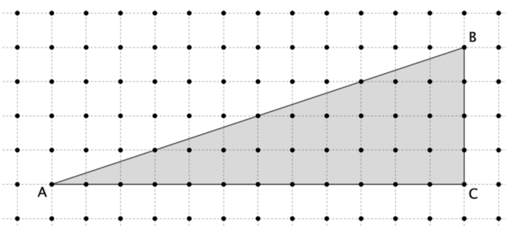



*Figure 3 – questions 3*

**<u>Q 3-a</u> :** Pour le triangle de PICK $ABC$ rectangle en $C$ ci-contre, déterminer $i$, $b$ et $A$.

**<u>Q 3-b</u> :** Sur cet exemple, vérifier que l'on a $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

### <u>Questions 4 : le cas des triangles rectangles de PICK</u>

On considère le triangle rectangle de PICK $ABC$ de la figure 2, tracé sur la figure 4.
Soient $b_T$ le nombre de points sur les bords du triangle rectangle $ABC$, $i_T$ le nombre de ses points strictement intérieur et $k$ le nombre de points du réseau sur le segment $[AC]$ exceptés les points $A$ et $C$.

**<u>Q 4-a</u> :** Justifier que $b_R = 2b_T - 2 - 2k$

**<u>Q 4-b</u> :** Justifier que $i_R = 2i_T + k$

**<u>Q 4-c</u> :** En déduire que l'aire $A_T$ du triangle rectangle $ABC$ vérifie $A_T = i_T + \frac{b_T}{2} - 1$

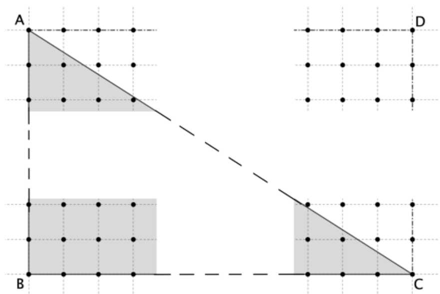



*Figure 4 – questions 4*

**Questions 5 : le cas de points intérieurs alignés dans un polygone de PICK**

**Q 5-a :** Pour la figure de l'annexe 1, déterminer $i$, $b$ et $A$.

**Q 5-b :** Vérifier que l'on a encore $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

**Q 5-c :** Sur l'annexe 2, tracer un polygone de PICK avec $i = 4$ et $b = 3$.

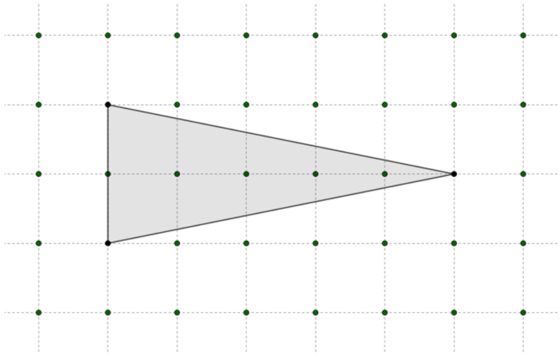
**On appelle formule de PICK la relation $\boldsymbol{A = i + \frac{b}{2} - 1}$.**

## Partie II : formule de PICK pour un polygone de PICK quelconque

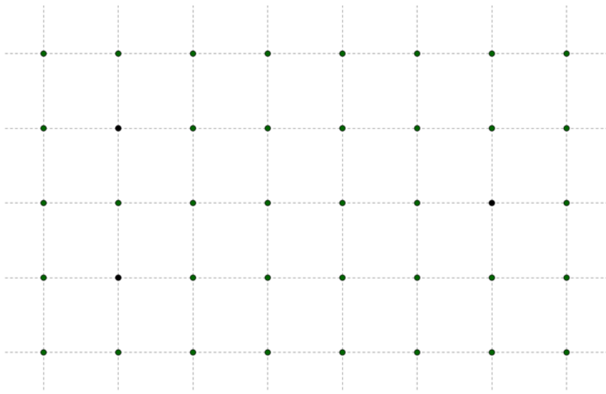
On admet que la formule de PICK reste valide pour un polygone de PICK quelconque.

**Q 6 :** Déterminer l'aire du polygone de PICK en annexe 3.

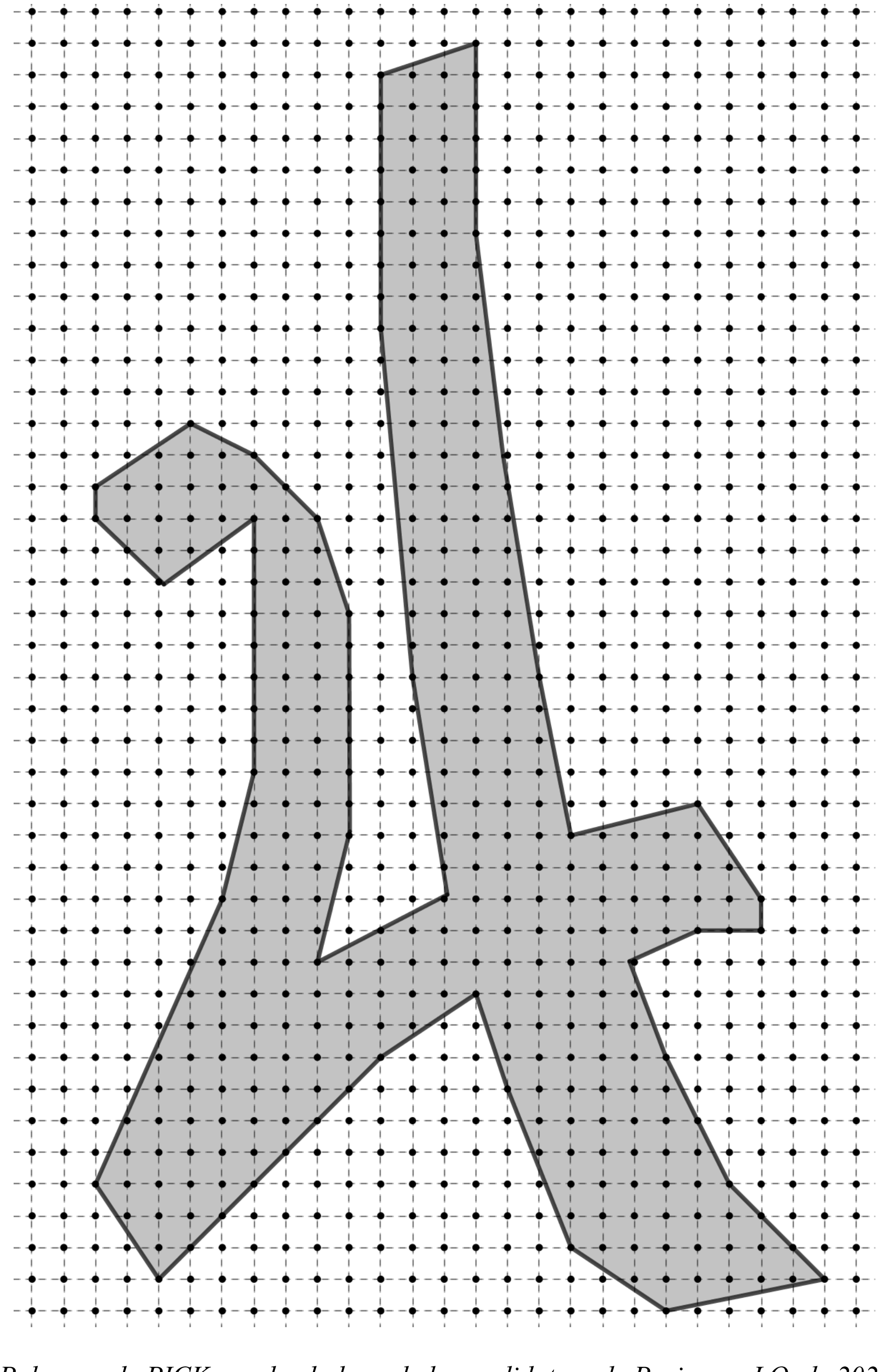
## ANNEXE 1



## ANNEXE 2



## ANNEXE 3



*Polygone de PICK proche du logo de la candidature de Paris aux J.O. de 2024*

Région académique
HAUTS-DE-FRANCE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

# Olympiades Nationales de Mathématiques

-------------

## Académie de Lille

Mercredi 20 mars 2024 de 8h à 12h10

-------------

## Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, séparées d'une pause de dix minutes. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents : 8h et 10h10.**

La première partie, constituée des exercices nationaux, est réalisée individuellement.

À son issue, les copies sont ramassées et une pause de dix minutes est prévue.

La seconde partie, constituée des exercices académiques, est réalisée en binôme.

## Énoncés de la première partie de 08h00 à 10h00

**Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.**

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

**Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.**

# Première partie

de 08h00  à 10h00

Exercices nationaux

Travail individuel

Pause de 10h00 à 10h10

## Exercice 1

## PLUS FORT !

Dans cet exercice, toutes les questions et sous-questions sont, dans une large mesure, indépendantes. À partir de la question **7**, certaines montent crescendo en difficulté. Toutes les réponses devront être argumentées.

**1.** *Pourcentages pour tous les âges.*

***a.*** Est-il exact que pour tous nombres réels positifs $x$ et $y$, $x$ % de $y$ euros valent $y$ % de $x$ euros ? En déduire sans calcul compliqué ce que valent 32 % de 25 euros.

***b.*** Est-il exact que, pendant les soldes, après 4 baisses consécutives de 25 %, un article devient gratuit ?

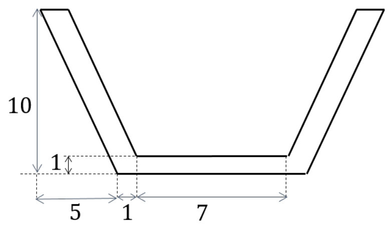
***c.*** On passe d'un prix HT (hors taxe) à un prix TTC (toutes taxes comprises) en augmentant le prix HT de 20 %. Si le prix TTC d'un article est 2 fois plus élevé dans un magasin que dans un autre, le prix HT l'est-il aussi ?

**2.** *Double sens.* Donner deux reformulations très différentes à la question « Quel nombre donne 51 quand on le multiplie par 0,01 ? » pour en lever l'ambiguïté, et apporter les deux réponses très différentes possibles.

**3.** *Le secret pour avoir* 20/20. Un sujet d'examen, noté sur 20, comprend un exercice noté sur 5 et un problème, noté sur 15. Un candidat reçoit la note de 4 sur 5 à l'exercice et de 3 sur 15 au problème. Quelle est sa note sur 20 ? Pourtant, le calcul fractionnaire démontre que $\frac{4}{5}+\frac{3}{15}=\frac{20}{20}$ (résultat à justifier). Avancez une raison à ce paradoxe et démontrer, dans le même contexte d'un exercice sur 5 et d'un problème sur 15, que le second calcul donne toujours un meilleur résultat que le premier.

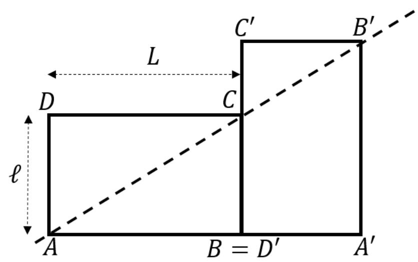
**4.** *Trouver l'intrus.* On dispose d'une balance à deux plateaux comme sur la figure ci-contre. Soient 5 oranges indiscernables au toucher et à la vue ; 4 ont exactement le même poids et 1 est un peu moins lourde. Proposer un protocole permettant, en 2 pesées au maximum, de détecter l'orange la moins lourde. Soient maintenant 2 024 oranges indiscernables au toucher et à la vue ; 2 023 ont exactement le même poids et 1 est un peu moins lourde. Proposer un protocole permettant, en 10 pesées au maximum, de détecter l'orange la moins lourde.

**5.** *Tchin !* Un verre est représenté en coupe méridienne (unité en cm ; la figure n'est pas à l'échelle ; les parois intérieures et extérieures sont parallèles). On y empile un second verre, du même modèle. À quelle hauteur s'élève l'ensemble ? On accompagnera sa rédaction d'un croquis.

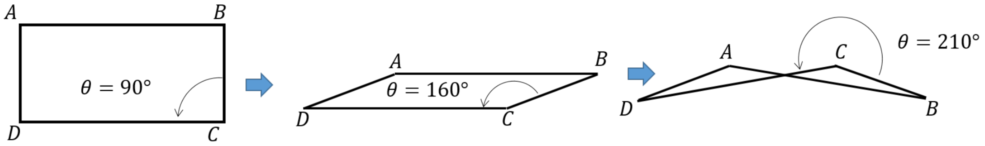



**6.** *Le début de la richesse.* Deux rectangles $ABCD$ et $A'B'C'D'$ identiques de largeur $\ell$ et de longueur $L > \ell$ sont juxtaposés comme sur la figure ci-contre, où le premier est posé horizontalement et le second dressé verticalement. Montrer que les points $ACB'$ sont alignés quand $\frac{L}{\ell}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(Après l'épreuve, essayez avec deux rectangles au format CB (« carte bleue »), vous verrez, cela fonctionne !)

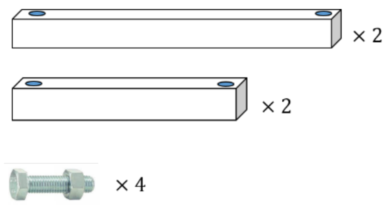


**7.** *Quelle forme !?* Un rectangle $ABCD$ est articulé en ses quatre sommets. Il peut donc se déformer en parallélogramme, puis en contre-parallélogramme en jouant sur l'ouverture $\theta = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right)$ comme ci-dessous.




Dessiner les configurations obtenues quand les angles mesurent successivement $\theta = 120°$, puis $\theta = 180°$ puis $\theta = 225°$. On laissera apparents les traits de construction et on choisira $DC$ trois fois plus grand que $AD$.

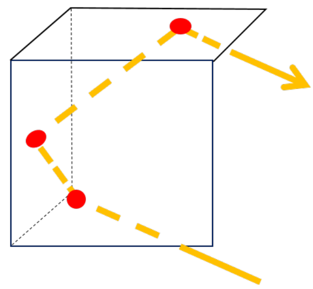
On dispose ensuite de quatre barrettes parallélépipédiques (percées en leurs extrémités) : deux longues et deux courtes (trois fois plus petites que les longues), et de quatre boulons (un boulon est composé d'une vis et d'un écrou). Dessiner en perspective les assemblages possibles vous permettant de fabriquer un parallélogramme articulé avec ces fournitures. Cependant, quel est le seul assemblage laissant le mécanisme se déformer jusqu'au contre-parallélogramme ?



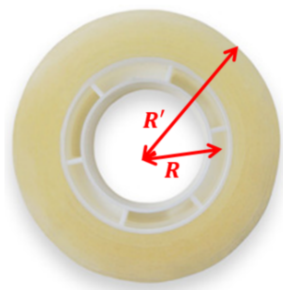

**8.** *Rien que pour vos yeux.* Un coin de cube est constitué de trois miroirs perpendiculaires. En général, un rayon incident qui vient frapper l'un des miroirs est ensuite réfléchi sur les deux autres avant de repartir. Par exemple, sur le dessin en regard, le rayon lumineux rebondit trois fois : il frappe d'abord la face avant, puis la face latérale gauche, puis la face supérieure.

Expliquer pourquoi le rayon qui repart est alors parallèle au rayon qui arrivait.

En déduire l'intérêt d'un tel dispositif pour fabriquer les catadioptres situés à l'arrière des bicyclettes et des automobiles.



**9.** Un rouleau de bande adhésive a pour rayon intérieur $R = 1{,}8$ cm et pour rayon extérieur $R' = 2{,}6$ cm. La bande adhésive mesure 25 m de long. Déterminer le plus précisément possible son épaisseur.




**10.** Un tableau de $n$ lignes et $p$ colonnes contient des nombres réels. On réarrange chaque ligne de gauche à droite dans l'ordre croissant, puis chaque colonne de bas en haut dans l'ordre croissant comme sur l'exemple ci-contre (où $n = 3$ et $p = 5$).

Démontrer qu'à l'issue de cette seconde opération chaque ligne demeure bien classée, toujours dans l'ordre croissant de gauche à droite donc.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 3 | 4 | 8 |
| 0 | 9 | 2 | 7 | 14 |
| 20 | 3 | 7 | 7 | 7 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 8 | 8 |
| 0 | 2 | 7 | 9 | 14 |
| 3 | 7 | 7 | 7 | 20 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 7 | 9 | 20 |
| 1 | 3 | 7 | 8 | 14 |
| 0 | 2 | 4 | 7 | 8 |

## Exercice 2
### *Nous sommes toutes distinctes*

Dans cet exercice, le symbole $n$ désigne un entier naturel, avec $n \geq 1$ ; tous les ensembles considérés sont non vides, finis et constitués de nombres réels distincts ; de plus on conviendra d'écrire tout ensemble fini $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ à $n$ éléments réels distincts en ordonnant toujours $a_1, a_2, \cdots, a_n$ si bien que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Étant donné un tel ensemble, on note $S(A)$ la somme de ses éléments, soit :

$$S(A) = a_1 + \cdots + a_n$$

En particulier, lorsque $n = 1$ et donc $A = \{a_1\}$ est un singleton, $S(A) = a_1$.

On dit que l'ensemble $A$ est ***à sommes toutes distinctes*** (en abrégé que $A$ est STD) quand, pour toutes parties non vides distinctes $Y$ et $Z$ de $A$, $S(Y) \neq S(Z)$. Cela revient à demander aux $2^n - 1$ sommes que l'on peut former avec des éléments de $A$ d'être toutes distinctes.

Par exemple $A = \{1, 2, 5\}$ est STD parce que les nombres $1, 2, 5, 1+2=3, 2+5=7, 1+5=6, 1+2+5=8$ sont tous distincts. En revanche, $A = \{2, 4, 6, 7\}$ n'est pas STD parce qu'en prenant $Y = \{2, 4, 7\}$ et $Z = \{6, 7\}$, on a $S(Y) = 2+4+7 = 13 = S(Z)$, bien que $Y \neq Z$.

**Partie 1 : Exemples et contre-exemples simples**

**1.** Expliquer pourquoi le nombre de sommes à envisager pour étudier le caractère STD de $A$ vaut $2^n - 1$.

**2.** Montrer que l'ensemble $\{1, 3, 5\}$ est STD mais que l'ensemble $\{4, 6, 7, 9\}$ ne l'est pas.

**3.** Quel(s) ensemble(s) $A$ contenant 0 est (sont) STD ?

**4.** Soient $A$ et $B$ deux ensembles non vides et finis de réels distincts, avec $A \subset B$ (c'est-à-dire que $A$ est un sous-ensemble de $B$).

***a.*** Si $B$ est STD ; justifier que $A$ l'est aussi.

***b.*** L'ensemble $B$ peut-il être STD si $A$ ne l'est pas ?

**5.** Soit $A$ un ensemble non vide et fini de réels distincts. On suppose que $A$ n'est constitué que de nombres entiers et qu'il est STD. Justifier que $A \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$ puis que $A \cup \left\{\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right\}$ sont aussi STD.

**Partie 2 : Construction d'une suite**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence, valable pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = u_1 + \cdots + u_n + 1$$

**6.** Vérifier que $u_2 = 2$ et $u_3 = 4$. Calculer $u_5$.

**7.** Rédiger sur votre copie un programme en langage Python qui renverrait $u_{100}$ (qu'on ne calculera pas).

**8.** Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$.

**9.** Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\{u_1, \cdots, u_n\}$ est STD.

**10.** Montrer que $(u_n)$ est en fait une suite géométrique que l'on déterminera.

**Partie 3 : Suites STD**

Une *suite* $(u_n)$ est *dite* STD lorsqu'elle est strictement croissante, qu'elle est composée d'entiers strictement positifs, et que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\{u_1, \cdots, u_n\}$ est STD. Par exemple, la suite étudiée en **partie 2** est une suite STD.

**11.** Soit $(u_n)$ une suite STD quelconque.

***a.*** Montrer que pour tout $n \geq 1$ :

$$u_1 + \cdots + u_n \geq 2^n - 1$$

***b.*** En déduire que pour tout $n \geq 2$ :

$$u_n \geq \frac{2^n}{n}$$

**12.** Le but cette question est d'affiner la minoration obtenue à la question précédente. Pour ce faire, nous aurons recours aux probabilités, et nous dirons qu'une variable aléatoire $X$ à valeurs dans un ensemble réel fini non vide $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ à $n$ éléments distincts suit une loi uniforme quand toutes les valeurs qu'elle peut atteindre sont équiprobables. Ainsi,

$$P(X = a_1) = P(X = a_2) = \cdots = P(X = a_n) = \frac{1}{n}$$

***a.*** Soit $(u_n)$ une suite STD quelconque. Pour $n \geq 2$ on considère les variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ qui suivent la loi uniforme sur la paire $\{-1,1\}$ : ainsi, pour chacun des indices $i$, $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $X = u_1X_1 + \cdots + u_nX_n$. On admet que $E(X) = u_1E(X_1) + \cdots + u_nE(X_n)$ et que $V(X) = u_1^2V(X_1) + \ldots + u_n^2V(X_n)$. Après avoir justifié que $E(X_1) = 0$ et $V(X_1) = 1$, calculer l'espérance $E(X)$ et exprimer la variance $V(X)$ en fonction de $u_1, u_2, \cdots, u_n$.
***b.*** Montrer que $X$ suit une loi uniforme sur un ensemble de $2^n$ entiers relatifs, symétrique par rapport à 0, et dont les éléments sont non nuls et de la même parité.
***c.*** En déduire que pour $n \geq 1$

$$u_n{}^2 \geq \frac{1}{n\, 2^{n-1}}(1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2^n - 1)^2)$$

***d.*** Proposer une valeur de $n \geq 2$ pour laquelle cette inégalité fournit un minorant plus grand qu'en **11.*b***.

# Olympiades Nationales de Mathématiques

-------------

## Académie de Lille

Mercredi 20 mars 2024 de 8h à 12h10

-------------

## Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, séparées d'une pause de dix minutes. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents : 8h et 10h10.**

La première partie, constituée des exercices nationaux, est réalisée individuellement.

À son issue, les copies sont ramassées et une pause de dix minutes est prévue.

La seconde partie, constituée des exercices académiques, est réalisée en binôme.

## Énoncés de la seconde partie de 10h10 à 12h10

**Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.**

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

**Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.**

# Deuxième partie

de 10h10  à 12h10

Exercices académiques

Travail en binôme

# Exercice 1
# L'ALGORITHME DE KAPREKAR

**Dans cet exercice, les parties sont dépendantes.**

## Définitions et exemples

*Notations*

- Un nombre entier non nul à $p$ chiffres est noté $n = \overline{a_{p-1} \cdots a_1 a_0}$ où $a_0$ est le chiffre des unités, $a_1$ le chiffre des dizaines etc… et $a_{p-1} \neq 0$.
- $n$ se décompose en base 10 sous la forme $\boldsymbol{n = \overline{a_{p-1} \cdots a_1 a_0} = a_{p-1} \times 10^{p-1} + \cdots + a_1 \times 10^1 + a_0}$.

Exemple : $n = \overline{506} = 5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 6$ (habituellement noté 506)

*Définitions*

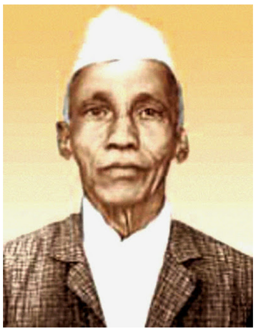
- Etant donné un entier naturel $n$ non nul,
  - $\boldsymbol{c(n)}$ est le nombre construit en ordonnant les chiffres du nombre $n$ dans l'ordre croissant.
  - $\boldsymbol{d(n)}$ est le nombre construit en ordonnant les chiffres du nombre $n$ dans l'ordre décroissant.

Exemple : $c(506) = 056 = 56$ et $d(506) = 650$

- On considère la **fonction $\boldsymbol{K}$** définie sur $\mathbb{N}^*$ par $K(n) = d(n) - c(n)$

Exemple : $K(506) = d(506) - c(506) = 650 - 56 = 594$

**Procédé détaillant l'algorithme de Kaprekar :**



Dattatreya Ramachandra Kaprekar, est un mathématicien indien (1905-1988)

**L'algorithme de Kaprekar** consiste à répéter l'application de la fonction $K$ :

$$n \mapsto K(n) = n_1 \mapsto K(n_1) = n_2 \mapsto K(n_2) = n_3 \mapsto \cdots$$

L'algorithme s'arrête s'il aboutit à 0 ou à un nombre $n_k$ non nul tel que $n_k = K(n_k)$.
Une telle valeur $n_k$ est appelée **point fixe** de l'algorithme de Kaprekar.

*Exemple*

En partant du nombre $n = 5\,294$, on obtient $n_1 = K(5\,294) = 9\,542 - 2\,459 = 7\,083$. En réappliquant la fonction $K$, on obtient : $n_2 = K(7\,083) = 8\,730 - 378 = 8\,352$.

Puis, $n_3 = K(8\,352) = 6\,174$, etc.

On peut noter : $5294 \mapsto K(5294) = 7083 \mapsto K(7083) = 8352 \mapsto K(8352) = 6174 \mapsto \cdots$

**Questions préliminaires**

**<u>Q 1</u> :** Justifier que 2 nombres dont les chiffres sont les mêmes à l'ordre près (comme 623 et 236, par exemple) possèdent la même image par la fonction de Kaprekar.

Dans certaines questions de ce sujet, on pourra donc, indifféremment, calculer l'image par $K$ de $n$ ou de $d\ (n)$.

**<u>Q 2</u> :** Combien d'étapes sont nécessaires pour que l'algorithme de Kaprekar s'arrête si on l'applique à un nombre entier compris entre 1 et 9 ?

**Partie I – Entiers naturels à deux chiffres : entre 10 et 99**

**Dans cette partie, on se propose d'étudier l'algorithme de Kaprekar et son éventuel arrêt pour les nombres à deux chiffres.**

**<u>Q 3</u> :** Appliquer l'algorithme de Kaprekar à 53.

**<u>Q 4</u> :** Choisir un entier naturel à deux chiffres distincts et lui appliquer l'algorithme de Kaprekar.

**<u>Questions 5 : Etude de l'arrêt de l'algorithme</u>**

**<u>Q 5-a</u> :** Montrer que, pour tout entier naturel $n$ à deux chiffres, la première étape de l'algorithme aboutit à un nombre $n_1 = K(n)$ multiple de 9.

**<u>Q 5-b</u> :** A quels entiers naturels à deux chiffres peut-on réduire l'étude de l'arrêt de l'algorithme de Kaprekar ?

**<u>Q 5-c</u> :** Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête toujours lorsqu'on l'applique à un entier naturel à deux chiffres.

**Partie II – Entiers naturels à trois chiffres : entre 100 et 999**

**Dans cette partie, on se propose d'étudier l'algorithme de Kaprekar et son éventuel arrêt pour les nombres à trois chiffres.**

**<u>Q 6</u> :** Choisir un entier naturel à trois chiffres et lui appliquer l'algorithme de Kaprekar. S'arrête-t-il sur un point fixe ?

**<u>Q 7</u> :** Soit $n = \overline{abc}$ un nombre à trois chiffres. D'après la remarque de la question Q1, on considère $a \geq b \geq c$. Montrer que $n_1 = K(n) = 99(a - c)$, avec $0 \leq a - c \leq 9$.
En déduire que : $n_1 = 0$, ou $n_1 = 99$, ou $n_1$ est à trois chiffres.

**<u>Questions 8 : Etude de l'arrêt de l'algorithme lorsque $n_1 = 0$</u>**

**<u>Q 8-a</u> :** Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête dans ces cas.

**<u>Q 8-b</u> :** Déterminer la liste des entiers $n = \overline{abc}$ avec $a \geq b \geq c$ pour lesquels $n_1 = K(n) = 0$.

**<u>Questions 9 : Etude de l'arrêt de l'algorithme lorsque $n_1 = 99$</u>**

**<u>Q 9-a :</u>** Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête dans ce cas.

**<u>Q 9-b</u> :** Déterminer la liste des entiers $n = \overline{abc}$ avec $a \geq b \geq c$ pour lesquels $n_1 = K(n) = 99$.

**<u>Questions 10 : Etude de l'arrêt de l'algorithme lorsque $n_1$ s'écrit avec trois chiffres</u>**

**<u>Q 10-a</u> :** Quelles sont les valeurs de $n_1$ possibles qui s'écrivent avec trois chiffres ?

**<u>Q 10-b</u> :** Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête dans ces cas.

**Questions 11 : Cas d'arrêt de l'algorithme pour les entiers naturels à trois chiffres**

**Q 11-a :** Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête pour tout entier naturel à 3 chiffres.

**Q 11-b :** Quand on leur applique l'algorithme de Kaprekar, combien d'entiers naturels à trois chiffres ont 0 pour valeur d'arrêt ? Combien s'arrêtent sur un point fixe ? Quel(s) point(s) fixe(s) ?

## Partie III – Entiers naturels à quatre chiffres : entre 1000 et 9999

**Dans cette partie, on se propose d'étudier l'algorithme de Kaprekar et son éventuel arrêt pour les nombres à quatre chiffres.**

On considère maintenant un entier à quatre chiffres $n = \overline{abcd}$. D'après la remarque de la question Q1, on peut supposer que $a \geq b \geq c \geq d$.

**Q 12 :** Montrer que l'on a l'inégalité $0 \leq b - c \leq a - d$.

**Q 13 :** Montrer que $n_1 = K(n) = 999(a - d) + 90(b - c)$.
**Q 14 :** Justifier que $n_1$ est multiple de 9.

Dans les questions suivantes, l'action de l'algorithme de Kaprekar est étudiée en distinguant ces entiers à quatre chiffres selon les valeurs des différences $a - d$ et $b - c$.

**Questions 15 : On suppose que $a - d = 0$**

**Q 15-a :** Que vaut $n_1 = K(n)$ dans ce(s) cas ?

**Q 15-b :** Quels sont les nombres $n$ à quatre chiffres concernés par la condition $a - d = 0$ ?

**Questions 16 : On suppose que $a - d = 1$**

**Q 16-a :** Déterminer les deux valeurs possibles pour $n_1 = K(n)$.

**Q 16-b :** Appliquer l'algorithme de Kaprekar à ces deux valeurs.

**Q 16-c :** Quels sont les nombres à quatre chiffres pour lesquels $n_1 = K(n) = 999$ ?

**Questions 17 : On suppose que $a - d \geq 2$**

On considère le tableau en ANNEXE 1 qui fait apparaître les différentes valeurs possibles de $n_1 = K(n)$.

**Q 17-a :** Justifier la présence de cases « impossibles » dans le tableau, notées X.

**Q 17-b :** Compléter le tableau.

**Questions 18 : L'arbre de Kaprekar**

Dans l'arbre de Kaprekar (en annexe), les nombres sont remplacés par leurs versions « ordonnées décroissantes » :

- chaque flèche représente l'application de la fonction $K$,
- dans chaque case, comme l'algorithme de Kaprekar est insensible à l'ordre des chiffres d'un nombre donné, on écrit $d(n)$ pour représenter tous les entiers $n$ ayant les mêmes chiffres à l'ordre près.

**Q 18-a :** Ecrire en version « ordonnée décroissante » toutes les possibilités de $n_1 = K(n)$ à quatre chiffres. En dresser la liste dans l'ordre croissant.

**Q 18-b :** Sur la feuille annexe, compléter l'arbre de Kaprekar, où certaines des valeurs de $n_1 = K(n)$ ont été positionnées.

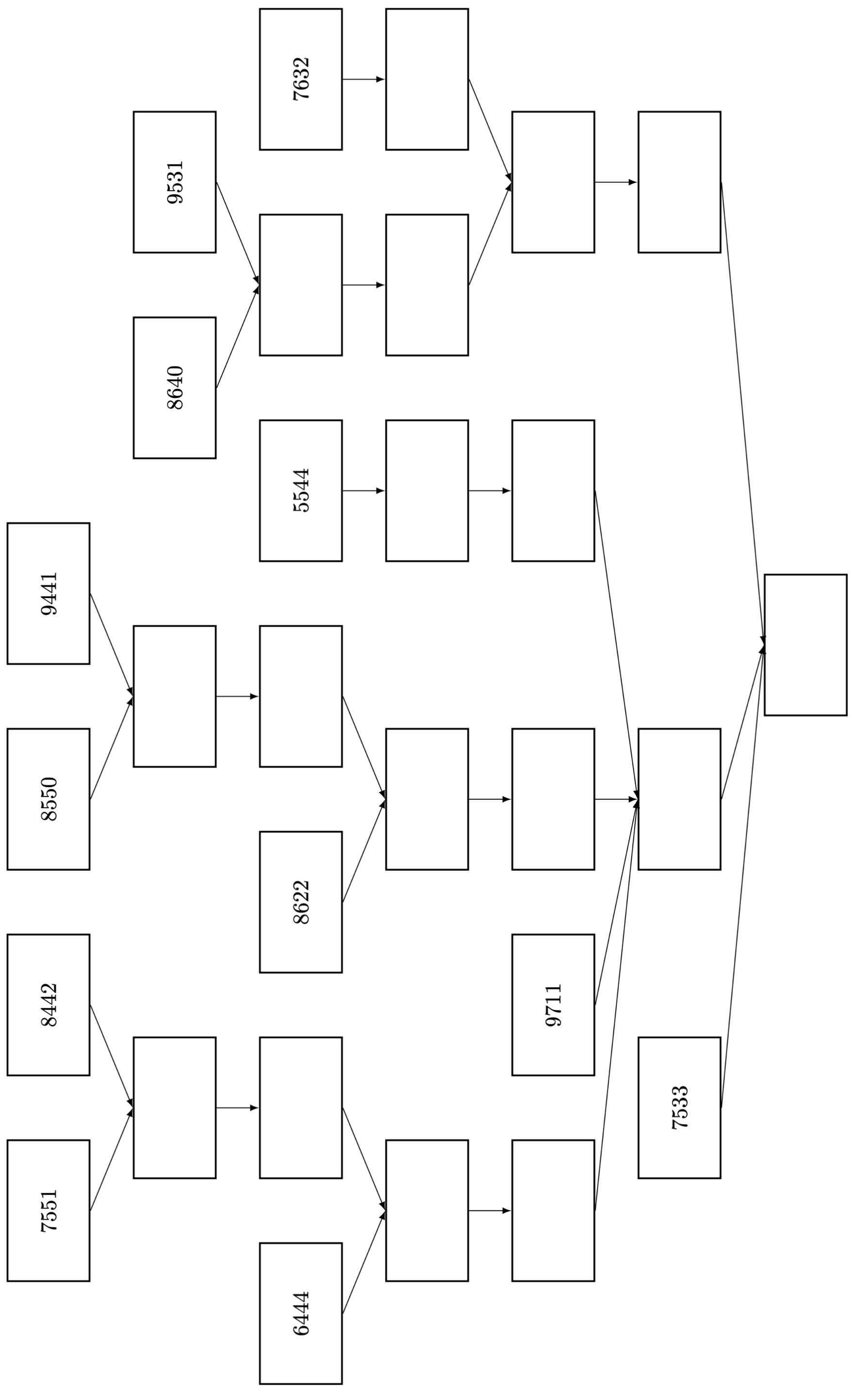
**Q 18-c :** Appliquer l'algorithme de Kaprekar au dernier nombre au bas de l'arbre de Kaprekar.

**Q 19 :** Quels sont le(s) point(s) fixe(s) possible(s) de l'algorithme de Kaprekar pour les nombres à quatre chiffres ? Combien de nombres à quatre chiffres aboutissent à 0 ? Combien aboutissent à chacun de ce(s) point(s) fixe(s) ?

## ANNEXE 1

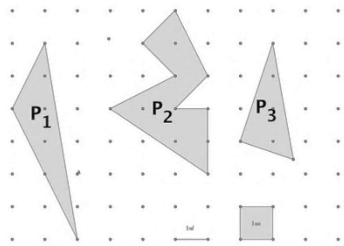
| $a$ \ $-d$ / $b-c$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | 8172 | |
| 3 | X | | | | | 7263 | 8262 | |
| 4 | X | X | | | | | | |
| 5 | X | X | X | | | | | |
| 6 | X | X | X | X | | | | |
| 7 | X | X | X | X | X | | | |
| 8 | X | X | X | X | X | X | | |
| 9 | X | X | X | X | X | X | X | |

## ANNEXE 2



# Exercice 2
# Polygones de PICK

**Dans tout le problème :**




- On note une unité de longueur 1 $u.l$ et l'une unité d'aire 1 $u.a$.
- On travaille dans un réseau pointé à maille carrée de côté 1.
- On appelle polygone de PICK, un polygone non aplati construit sur un tel réseau et dont chacun des sommets est un point du réseau.
- On note $i$ le nombre de points du réseau strictement intérieurs à ce polygone et $b$ le nombre de points du réseau sur le bord du polygone
- On note $A$ l'aire du polygone de PICK

Dans la figure ci-contre, les polygones $P_1$ et $P_2$ sont des polygones de PICK et le polygone $P_3$ ne l'est pas.

Pour le polygone $P_1$ on a $i = 3$ et $b = 4$, pour le polygone $P_2$ on a $i = 3$ et $b = 9$

## Partie I : Etude de quelques polygones de PICK

### Questions 1 : le cas d'un rectangle de PICK

**Q 1-a :** Pour le rectangle de PICK de la figure 1 ci-contre, déterminer $i$, $b$ et $A$.
**Q 1-b :** Calculer $i + \frac{b}{2} - 1$. Que constate-t-on ?

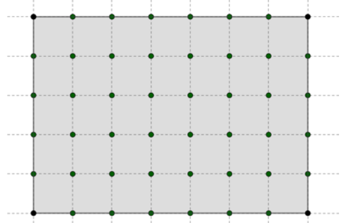


*Figure 1 – questions 1*

### Questions 2 : le cas des rectangles de PICK

Soit $ABCD$ un rectangle de PICK de dimensions quelconques dont les côtés sont parallèles au réseau (comme dans la figure 2 ci-contre).
On note $L$ sa longueur et $l$ sa largeur.
Soient $b_R$ le nombre de points sur les bords du rectangle $ABCD$, $i_R$ le nombre de ses points strictement intérieurs.

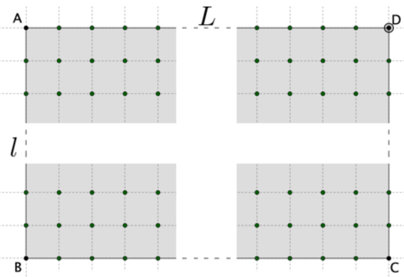



*Figure 2 – questions 2*

**Q 2-a :** Exprimer en fonction de $L$, le nombre de points sur le côté $[AD]$, extrémités comprises ?
**Q 2-b :** Exprimer $b_R$ et $i_R$ en fonction de $L$ et $l$.
**Q 2-c :** En déduire que l'aire $A_R$ du rectangle vérifie $A_R = i_R + \frac{b_R}{2} - 1$.

### Questions 3 : le cas d'un triangle rectangle de PICK

**Q 3-a :** Pour le triangle de PICK $ABC$ rectangle en $C$ ci-contre, déterminer $i$, $b$ et $A$.
**Q 3-b :** Sur cet exemple, vérifier que l'on a $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

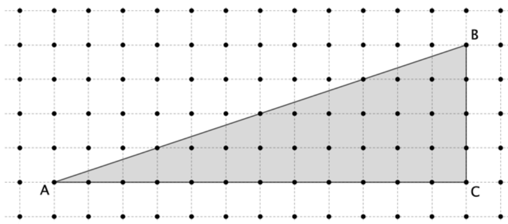



*Figure 3 – questions 3*

### Questions 4 : le cas des triangles rectangles de PICK

On considère le triangle rectangle de PICK $ABC$ de la figure 2, tracé sur la figure 4.
Soient $b_T$ le nombre de points sur les bords du triangle rectangle $ABC$, $i_T$ le nombre de ses points strictement intérieur et $k$ le nombre de points du réseau sur le segment $[AC]$ exceptés les points $A$ et $C$.

**Q 4-a :** Justifier que $b_R = 2b_T - 2 - 2k$
**Q 4-b :** Justifier que $i_R = 2i_T + k$
**Q 4-c :** En déduire que l'aire $A_T$ du triangle rectangle $ABC$ vérifie $A_T = i_T + \frac{b_T}{2} - 1$

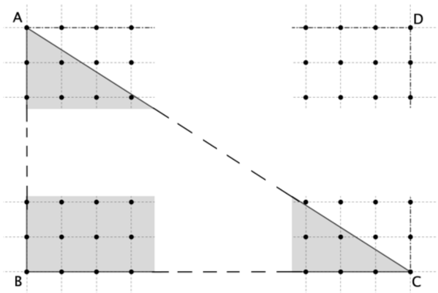



*Figure 4 – questions 4*

**<u>Questions 5 : le cas de points intérieurs alignés dans un polygone de PICK</u>**

**<u>Q 5-a</u> :** Pour la figure de l'annexe 1, déterminer $i$, $b$ et $A$.

**<u>Q 5-b</u> :** Vérifier que l'on a encore $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

**<u>Q 5-c</u> :** Sur l'annexe 2, tracer un polygone de PICK avec $i = 4$ et $b = 3$.

**On appelle formule de PICK la relation $A = i + \frac{b}{2} - 1$.**

## Partie II : formule de PICK pour un polygone constitué de deux triangles rectangles de PICK

Soit $P$ un polygone de PICK obtenu par juxtaposition de deux triangles rectangles de PICK, $T_1$ d'aire $A_1 = i_1 + \frac{b_1}{2} - 1$ et $T_2$ d'aire $A_2 = i_2 + \frac{b_2}{2} - 1$, comme indiqué sur la figure ci-contre :

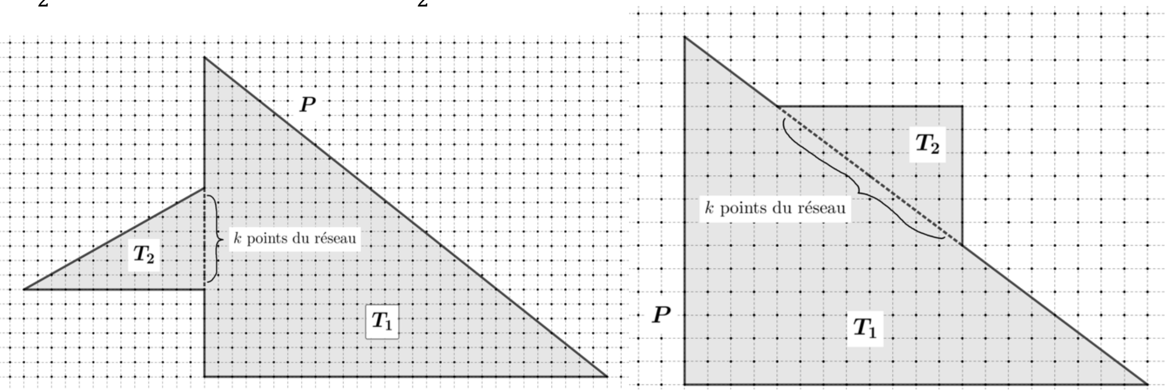



*Figure 5*

On note $k$ le nombre de points du réseau sur le segment commun à $T_1$ et $T_2$, exceptées ses extrémités.

**<u>Q 6</u> :** Exprimer $i$, le nombre de points du réseau strictement intérieurs à $P$, en fonction de $i_1, i_2$ et $k$.

**<u>Q 7</u> :** Exprimer $b$, le nombre de points du réseau sur le bord du polygone $P$, en fonction de $b_1, b_2$ et $k$.

**<u>Q 8</u> :** Exprimer $A$, l'aire du polygone $P$, en fonction de $A_1$ et $A_2$.

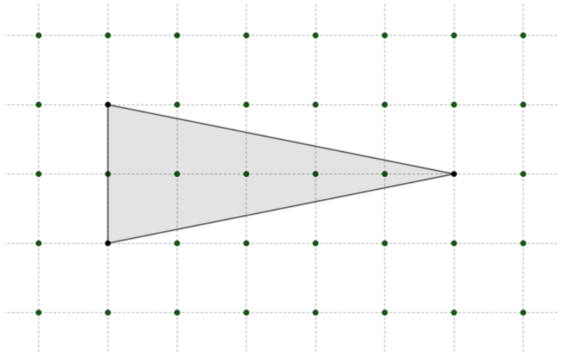
**<u>Q 9</u> :** La formule de PICK reste-t-elle valide pour le polygone $P$ ?

## Partie III : formule de PICK pour un polygone de PICK quelconque

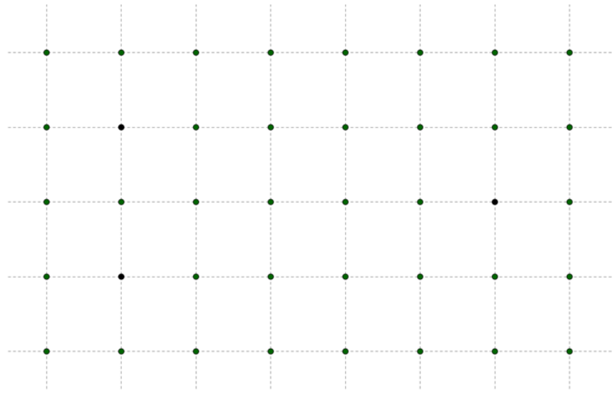
**<u>Q 10</u> :** Justifier que la formule de PICK reste valide pour un polygone de PICK obtenu par la juxtaposition d'un rectangle de PICK et d'un triangle rectangle de PICK.

**<u>Q 11</u> :** Déterminer l'aire du polygone de PICK en annexe 3.

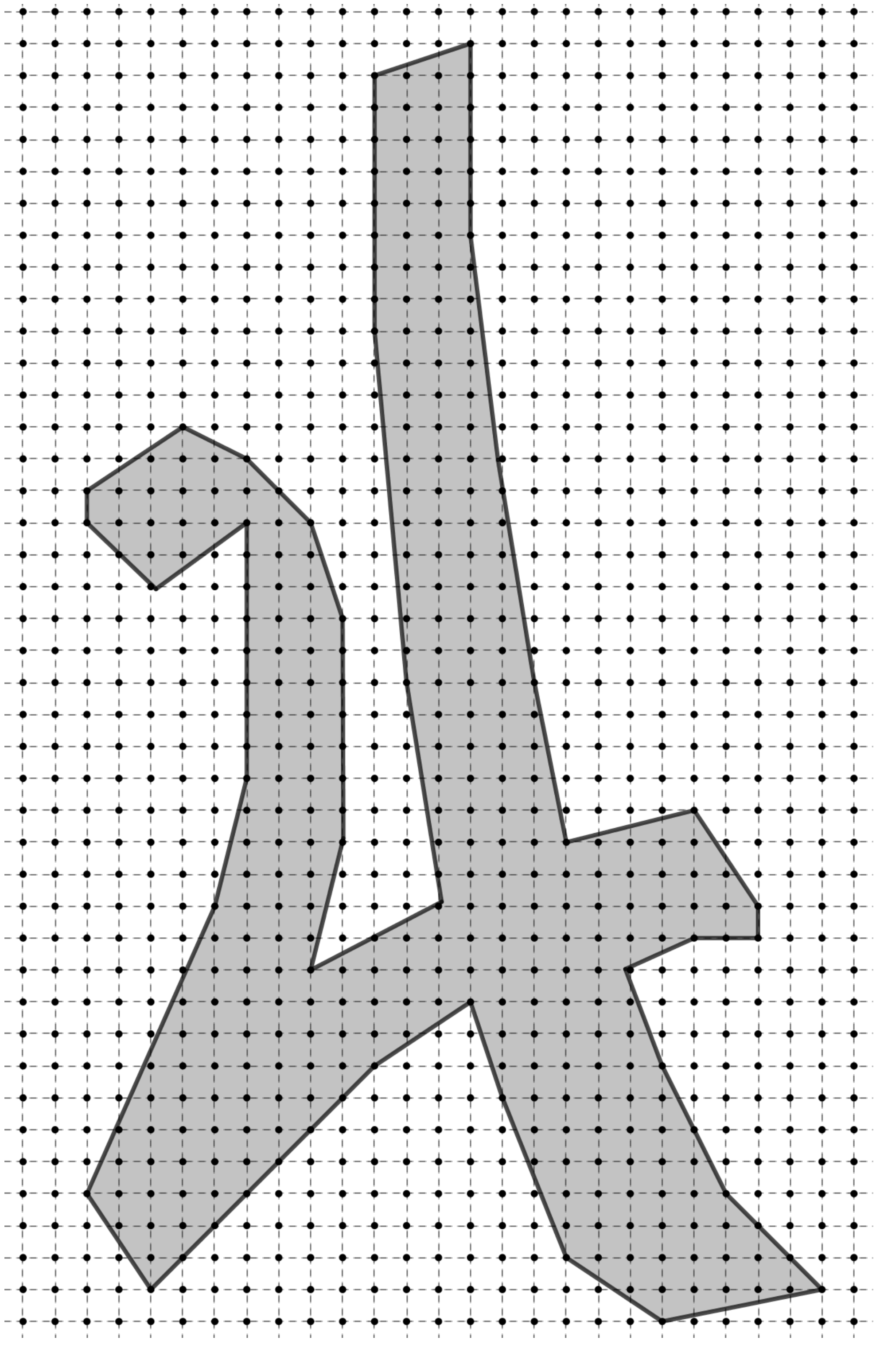
**ANNEXE 1**



**ANNEXE 2**



**ANNEXE 3**



*Polygone de PICK proche du logo de la candidature de Paris aux J.O. de 2024*