Exercice 1 CORRIGE -LES NOMBRES AUTOMORPHES

Dans ce sujet, les parties sont dépendantes.

Définitions et exemples

Définitions

- Un **chiffre** est un élément de la liste suivante : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Un **nombre entier** est composé d'un ou plusieurs chiffres.
- On dit qu'un nombre entier $N \geq 2$ est un **NOMBREAUTOMORPHE** lorsque l'écriture de son carré se termine par lui-même.

Remarque : 0 et 1 ne sont donc pas des nombres automorphes.

Quelques exemples

- 76 est un nombre automorphe à 2 chiffres car**76**² = 5 7**76**.
- 376 un nombre automorphe à 3 chiffres car**376**² = 141 **376.**
- 212 890 625 est automorphe à 9 chiffres puisque son carré est égal à 45 322 418 **212 890 625.**

Partie I – Liste de nombres automorphes

Dans cette partie, on se propose d'établir une propriété arithmétique des nombres automorphes qui permettra de les lister à l'aide d'un algorithme.

1. Déterminer tous les nombres automorphes à 1 chiffre.

Les nombres automorphes à 1 chiffre sont 5 et 6.

2. 25, 125 et 625 sont-ils des nombres automorphes ? Si oui, à combien de chiffres ?

$25^2 = 625$. *25 est un nombre automorphe à 2 chiffres.*

$125^2 = 15\ 625$. *125 n'est donc un nombre automorphe.*

$625^2 = 390\ 625$. *625 est un nombre automorphe à 3 chiffres.*

3. a)Pour déterminer tous les nombres automorphes à 2 chiffres, combien de nombres entiers faudrait-il tester ?

Pour déterminer tous les nombres automorphes à 2 chiffres, il faut tester les nombres entiers compris entre 10 et 99, soit $(99 - 10) + 1 = 90$ *nombres entiers.*

b) Même question avec les nombres à 3 chiffres.

Pour déterminer tous les nombres automorphes à 3 chiffres, il faut tester les nombres entiers compris entre 100 et 999, soit $(999 - 100) + 1 = 900$ *nombres entiers.*

4. a) Soit N un entier à k chiffres, montrer l'équivalence suivante :

Nest un nombre automorphe si et seulement si $N(N-1)$ est multiple de 10^k.

N est un nombre automorphe à k chiffres $\Leftrightarrow$ les k derniers chiffres de N^2 et N sont identiques.

$\Leftrightarrow$ les k derniers chiffres de $N^2 - N$ sont des zéros.

$\Leftrightarrow$ il existe $m \in$ □ tel que $N^2 - N = m \times 10^k$

$\Leftrightarrow$ il existe $m \in$ □ tel que $N(N-1) = m \times 10^k$

$\Leftrightarrow$ $10^k \mid N(N-1)$

b) Reprendre la question **2.**en utilisant cette propriété.

$25(25-1) = 25 \times 24 = 600 = 6 \times 10^2$. *25 est un nombre automorphe à 2 chiffres.*

$125(125-1) = 125 \times 124 = 15\ 500$. *125 n'est donc un nombre automorphe car* $125(125-1)$ *ne peut s'écrire sous la forme* $m \times 10^k$ avec $m \in$ □**et**$k = 3$.

$625(625-1) = 625 \times 624 = 390\ 000 = 390 \times 10^3$. *625 est un nombre automorphe à 3 chiffres.*

5. Dans cette question, k désignera un entier supérieur ou égal à 1.
On donne un script en langage Python qui a pour but de lister tous les nombres automorphes à k chiffres.
a) Compléter la ligne 5 du script suivant pour qu'il teste tous les entiers à k chiffres :

```
1 from math import*
2
3 def automorphe(k):
4     liste=[]
5     for n in range(...... , ....... ,1):
6         if n*(n-1)%(10**k)==0:
7             liste.append(n)
8     return liste
```

Solution :

```
1 from math import*
2
3 def automorphe(k):
4     liste=[]
5     for n in range(10**(k-1), 10**k-1 ,1):
6         if n*(n-1)%(10**k)==0:
7             liste.append(n)
8     return liste
```

b) Exprimer, en fonction de k, la quantité de nombres testés dans la boucle « for » de la ligne 5.
La quantité de nombres testés dans la boucle « for » de la ligne 5 est :

$$10^k - 1 - 10^{k-1} + 1 = 10^{k-1}(10 - 1) - 1 + 1 = 10^{k-1}\times 9 = 9\times 10^{k-1}$$

Notes

- La commande « *liste.append(élément)* » ajoute « élément » en fin de liste.
- La commande « *a%b* » renvoie le reste de la division euclidienne de l'entier *a* par l'entier *b*.

Remarques

- « automorphe(3) » renvoie la liste [376 , 625].
- Avec une calculatrice, « automorphe(6) » renvoie la liste en 8 secondes.
  « automorphe(8) » renvoie,quant à elle, laliste en plus de 13 minutes !

Partie II – Accélération algorithmique

Dans cette partie, on suppose que N est un nombre automorphe à k chiffres.

On va chercher à améliorer le temps d'exécution du programme précédent.

1. a)Justifier que $N(N-1)$ est un multiple de $2^k\times 5^k$, de 2^k et de 5^k.
Soit N un entier automorphe à k chiffres, alors il existe $m \in$ □ tel que $N(N-1) = m\times 10^k$.
Or $10^k = 2^k 5^k$. *D'où*

$$N\times(N-1) = m\times 2^k\times 5^k$$

On en déduit donc que $N(N-1)$ est un multiple de $2^k\times 5^k$, de 2^k et de 5^k.

b) Justifier que si$N$ est multiple de 2, alors $N-1$ ne l'est pas et réciproquement.
Méthode 1 :
Net $N-1$ sont deux entiers consécutifs, donc si l'un est pair (multiple de 2), l'autre est impair, et inversement.

Méthode 2 :

Sens direct ⇒:

Supposons que N soit divisible par 2. Alors il existe $k \in$ □ tel que $N = 2k$.
Par suite, $N - 1 = 2k - 1$ qui est l'écriture d'un nombre impair.
Par conséquent, $N - 1$ n'est pas divisible par 2.

Réciproque ⇐:

Procédons par contraposée.
Supposons que $N - 1$ soit divisible par 2. Alors il existe $k' \in$ □ tel que $N - 1 = 2k'$.
Par suite, $N = 2k' + 1$ qui est l'écriture d'un nombre impair.
Par conséquent, N n'est pas divisible par 2.

Remarque : *Dans cette question, le résultat reste vrai pour $N \in$ □ (non nécessairement automorphe)*

c) Déduire que, soit N est multiple de 2^k, soit $N - 1$ est multiple de 2^k.
On peut s'appuyer de la démonstration précédente pour répondre à cette question en remarquant l'équivalence suivante :

$$N \text{ est multiple de } 2^k \Leftrightarrow N \text{ est divisible par } 2^k$$

$N(N-1)$ est multiple de 2^k, donc $N(N-1)$ est divisible par 2^k,
En posant $k = m + n$ avec m et n entiers naturels, on a 2^m qui divise N et 2^n qui divise $N - 1$
Or, si m et n sont non nuls, on a alors 2 divise N et 2 divise $(N-1)$;
ce qui est impossible d'après la question précédente.
Donc m ou n est nul et par suite soit 2^k divise N soit 2^k divise $N - 1$.

Remarque : *Dans cette question, le résultat reste encore vrai pour $N \in \mathbb{Z}$ (non nécessairement automorphe)*

2. Par un raisonnement analogue, on admet que, soit N est multiple de 5^k, soit $N - 1$, est multiple de 5^k.
a) Dans le tableau 1, compléter par vraies ou fausses les propositions sur $N - 1$.
Voir Tableau 1.

b) Compléter les propositions du tableau 2.
Voir Tableau 2.

	Tableau 1							**Tableau 2**	
Cas possibles		**est multiple de 2^k**	**est multiple de 5^k**		**est multiple de 2^k**	**est multiple de 5^k**	**donc**	***N* est multiple de**	**$N-1$ est multiple de**
Cas 1	***N***	***Vraie***	***Vraie***	**$N-1$**	***Fausse***	***Fausse***	⇒	**$2^k \times 5^k$**	
Cas 2	***N***	***Vraie***	***Fausse***	**$N-1$**	***Fausse***	***Vraie***	⇒	**2^k**	**5^k**
Cas 3	***N***	***Fausse***	***Vraie***	**$N-1$**	***Vraie***	***Fausse***	⇒	**5^k**	**2^k**
Cas 4	***N***	***Fausse***	***Fausse***	**$N-1$**	***Vraie***	***Vraie***	⇒		**$2^k \times 5^k$**

3. Etude des cas :
a) **Cas 1 et 4.**
Montrer que les cas où Nou $N - 1$est un multiple de 10^kne sont pas possibles.
Si N est un nombre automorphe à k chiffres alors $N < 10^k$ et $N - 1 < 10^k$.
Par conséquent, les cas où Nou $N - 1$est un multiple de 10^kne sont pas possibles.

Remarque : *Dans cette question, le résultat reste encore vrai pour $N \in \mathbb{Z}$ (non nécessairement automorphe)*

b) **Cas 2 et 3.**
Finalement, quelles sont les seules valeurs de N à tester ?
Il suffit donc de tester les valeurs de N telles que N est multiple de 5^kou multiple de 2^k, la condition identique, croisée sur N-1 étant redondante.

4. En déduire ce qui doit être modifié dans le script de la question **5. Partie I** pour réduire le nombre de tests.
Dans le script Python, il suffit de doubler la boucle « for » avec pour pas 5^k*, pour la première et* 2^k*, pour la seconde.*

```
from math import *

def automorphe(k):
    liste=[]
    for n in range(10**(k-1),10**k-1,2**k):
        if n*(n-1)%(10**k)==0:
            liste.append(n)
    for n in range(10**(k-1),10**k-1,5**k):
        if n*(n-1)%(10**k)==0:
            liste.append(n)
    return liste
```

Remarque : Avec une telle modification, « automorphe(8) » renvoie la liste en 2 secondes !

Partie III – Une approche différente et optimale

Pour étendre la définition de nombre automorphe à k chiffres, on décide de faire évoluer l'écriture des nombres à k chiffres en acceptant qu'ils puissent commencer par un ou plusieurs 0 ce qui permet une nouvelle exploitation informatique.

Exemples

- 15 est un nombre à 2 chiffres, 015 est un nombre à 3 chiffres, 0015 est un nombre à 4 chiffres …
- 25 est un nombre automorphe à 2 chiffres car **25**^{2} = 6**25 qui se termine par 25.**
- 09376 est un nombre automorphe à 5 chiffres car **09376**^{2} = 87**09376 qui se termine par 09376.**

Contre-exemples

- 025 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres car 02**5**^{2} = 6**25 ne se termine pas par 025.**
- 0025 n'est pas un nombre automorphe à 4 chiffres car : 00**25**^{2} = 6**25 ne se termine pas par 0025.**

1. Recherche de quelques nombres automorphes.

a) Les nombres 6 et 06 sont-ils automorphes respectivement à 1 et 2 chiffres ?
$6^2 = 36$. *6 est un nombre automorphe à 1 chiffre.*
$06^2 = 36$. *06 n'est pas un nombre automorphe à 2 chiffres (car son carré ne se termine pas par 06).*

b) Les nombres 625, 0625 et 00625 sont-ils automorphes respectivement à 3, 4 et 5 chiffres ?
$625^2 = 390\ 625$. *625 est un nombre automorphe à 3 chiffres.*
$0625^2 = 390\ 625$. *0625 est un nombre automorphe à 4 chiffres.*
$00625^2 = 390\ 625$. *00625 n'est pas un nombre automorphe à 5 chiffres (car son carré ne se termine pas par 00625).*

On suppose $k \geq 1$ et on considère un nombre N_k dont les k chiffres de droite à gauche sont $c_1, c_2, c_3 \ldots, c_k$.

2. Raccourcissement d'un nombre automorphe.

On notera $N_k = \overline{c_k \ldots c_3 c_2 c_1}$ et on considère le nombre $N_{k+1} = \overline{c_{k+1} c_k \ldots c_3 c_2 c_1}$.

a) Justifier que $N_{k+1} = N_k + c_{k+1} \times 10^k$.
Si $c_1, c_2, c_3 \ldots, c_k, c_{k+1}$ *sont les kchiffres de droite à gauche nombre* N_{k+1}*, alors*

$$N_{k+1} = 10^k \times c_{k+1} + 10^{k-1} \times c_k + \cdots + 10^2 \times c_3 + 10 \times c_2 + c_1$$
$$= 10^k \times c_{k+1} + \overline{c_k \ldots c_3 c_2 c_1} = N_k + c_{k+1} \times 10^k.$$

b) Montrer que si N_{k+1} est automorphe alors N_k est aussi automorphe.
Comme $N_{k+1} = N_k + c_{k+1} \times 10^k$, alors $N_k = N_{k+1} - c_{k+1} \times 10^k$. Par suite,

$$(N_k)^2 = \left(N_{k+1} - c_{k+1} \times 10^k\right)^2 = (N_{k+1})^2 - 2N_{k+1} \times c_{k+1} \times 10^k + {c_{k+1}}^2 \times 10^{2k}$$

Les deux derniers termes de la somme se terminent par au moins k zéros donc $(N_k)^2$ et $(N_{k+1})^2$ se terminent par les mêmes k derniers chiffres qui sont donc $c_k \ldots c_3 c_2 c_1$, comme N_k. On en déduit donc que N_k est donc un nombre automorphe.

c) En déduire que $c_1 = 5$ ou 6.

D'après la question précédent, si N_k est automorphe alors N_{k-1} est aussi automorphe. Ainsi, N_{k-2} est aussi automorphe, N_{k-3} aussi, et de « proche en proche », $N_1 = c_1$ est aussi automorphe. Or d'après le 1. Partie I, les nombres automorphes à 1 chiffre sont 5 et 6. Donc $c_1 = 5$ ou 6.

3. Allongement d'un nombre automorphe.

On choisit un nombre N_k automorphe et on décide d'allonger par la gauche son écriture en lui ajoutant un chiffre.
On note M_{k+1} le prolongé de N_k et d le chiffre ajouté à gauche c'est-à-dire : $M_{k+1} = \overline{d\, c_k \dots\, c_3c_2c_1}$.
On note c, le $(k+1)^{ième}$ chiffre de ${N_k}^2$ en partant de la droite c'est-à-dire : ${N_k}^2 = \overline{\dots c\, c_k \dots\, c_3c_2c_1}$.

a) 76 est un nombre automorphe qu'on décide d'allonger par la gauche.
Exemple : 076 est un prolongé de 76.
Parmi les 10 nombres à 3 chiffres que l'on peut ainsi obtenir, lister ceux automorphes à 3 chiffres.

$076^2 = 5\,776$. *076 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 076).*
$176^2 = 30\,976$. *176 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 176).*
$276^2 = 76\,176$. *276 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 276).*
$376^2 = 141\,376$. *376 est un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré se termine par 376).*
$476^2 = 226\,576$. *476 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 476).*
$576^2 = 331\,776$. *576 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 576).*
$676^2 = 456\,976$. *676 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 676).*
$776^2 = 602\,176$. *776 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 776).*
$876^2 = 767\,376$. *876 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 876).*
$976^2 = 952\,576$. *976 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 976).*

b) Même question avec le nombre 25.

$025^2 = 625$. *025 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 025).*
$125^2 = 15\,625$. *125 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 125).*
$225^2 = 50\,625$. *225 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 225).*
$325^2 = 105\,625$. *325 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 325).*
$425^2 = 180\,625$. *425 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 425).*
$525^2 = 275\,625$. *525 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 125).*
$625^2 = 390\,625$. *625 est un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré se termine par 625).*
$725^2 = 525\,625$. *725 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 725).*
$825^2 = 680\,625$. *825 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 825).*
$925^2 = 855\,625$. *925 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres (car son carré ne se termine pas par 925).*

c) ***Cas où $c_1 = 5$.***
Justifier que la seule possibilité pour que M_{k+1} soit automorphe est de choisir $d = c$.

On sait que : ${N_k}^2 = \overline{\dots c\, c_k \dots\, c_3c_2c_1}$ *et* $M_{k+1} = \overline{d\, c_k \dots\, c_3c_2c_1} = 10^k d + N_k$
Calculons ${M_{k+1}}^2$ *pour voir si* M_{k+1} *est automorphe ou non. :*${M_{k+1}}^2 = 10^{2k}d^2 + 2\times10^k d\times N_k + {N_k}^2$

Examinons séparément les k derniers chiffres et le (k+1)^{ème} chiffre de ${M_{k+1}}^2$.
Pour les k derniers chiffres :

- $10^{2k}d^2$ *se termine par* $(2k)$ *zéros au moins*
- $2\times10^k d\times N_k$ *se termine par* (k) *zéros au moins*
- ${N_k}^2$ *se termine par* $c_k \dots\, c_3c_2c_1$
  - *Donc* ${M_{k+1}}^2$ *se termine par* $c_k \dots\, c_3c_2c_1$, *comme* M_{k+1}

Pour le $(k+1)^{ème}$ *chiffre :*

- *Celui de* $10^{2k}d^2$*est zéro : voir au dessus*
- *Celui de* ${N_k}^2$ *est c*
- *Celui de* $2\times10^k d\times N_k$ *est le chiffre des unités de* $2\times d\times N_k$ *donc de* $2\times d\times c_1$, *soit* 0 *puisque* $c_1 = 5$.
  - *Le* $(k+1)^{ème}$ *chiffre de* ${M_{k+1}}^2$ *est donc c.*

${M_{k+1}}^2$ *sera donc automorphe si et seulement si* $d = c$

d) ***Cas où $c_1 = 6$.***
Justifier qu'il n'existe qu'un choix possible pour d qui rende M_{k+1} automorphe.
On donnera alors ce choix lorsque $c = 0$ et celui lorsque $c \neq 0$.

On peut raisonner exactement de la même manière que précédemment :
Le seul changement concerne le $(k+1)^{\text{ème}}$ chiffre de ${M_{k+1}}^2$.

- *Celui de $10^{2k} d^2$ est zéro : voir au dessus*
- *Celui de ${N_k}^2$ est c*
- *Celui de $2 \times 10^k d \times N_k$ est le chiffre des unités $2 \times d \times N_k$ donc de $2 \times d \times c_1$, soit celui de $2d$ puisque $c_1 = 6$.*
  - *Le (k+1)^{ème} chiffre de ${M_{k+1}}^2$ est donc $c + 2d$.*

${M_{k+1}}^2$ sera donc automorphe si et seulement si $d = c + 2d$, soit $c + d = 0$ ou 10
Donc si $c = 0$, alors $d = 0$ et si $c \neq 0$ alors $d = 10 - c$.

Remarque : *On en déduit des questions c) et d) : tout nombre automorphe possède exactement un prolongé qui est automorphe.*

e) Combien d'entiers faut-il tester pour lister les nombres automorphes à k chiffres ?
Lesquels sont à tester ? Lesquels sont automorphes ?

Deux réponses sont acceptées.
Réponse 1 :
Il faut tester tous les prolongés des 2 nombres automorphes précédents : soit 20 nombres à tester dont 2 exactement seront automorphes.
Réponse 2 :
Il n'y a aucun test à faire, il suffit de calculer ${N_k}^2$ afin d'y repérer son $(k+1)^{\text{ème}}$ chiffre et de décider de la valeur de d (chiffre du prolongement) en fonction de c selon les règles établies au c) et au d)

A noter : cette nouvelle approche permet d'établir un petit programme Python qui trouve assez rapidement un nombre automorphe à 1000 chiffres !

1278125400133690086034889084364023875765936821979626181917833520492704199324875237825867148278905344897440142612317035699548419499444610608146207254036559998271588356035049327795540741961849280952093753026852390937562839148571612367351970609224242398777007574955787271559767413458997537695515862718887941516307569668816352155048898271704378508028434084412644126821848514157729916034497017892335796684991447389566001932545827678000618329854426232827257556110733160697015864984222291255485729879337147866323172405515756102352543994999345608083801190741530060056055744818709692785099775918050075416428527708162011350246806058163276171676765260937528056844214486193960499834472806721906670417240094234466197812426690787535944616698508064636137166384049029219341881909581659524477861846140912878298438431703248173428886572737663146519104988029447960814673760503957196893714671801375619055462996814764263903953007319108169802938509890062166509580863811000557423423230896109004106619977392256259918212890625