19e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Sujets académiques – académies d'Amiens et de Lille

Série S

Eléments de correction

Sujet 1 : jeu des rochers

Situation 1 : découverte du jeu et observations

1) **a.** $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ **b.** $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$

c. $p_1 + p_2 = \frac{2}{3}$ **d.** $p_1 q_1 + p_2 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_2 = \frac{2}{3}$

2) **a. b.**

		A_1	A_2	A_3
Rocher	1	G	P	P
	2	G	G	P
	3	P	G	G
	4	P	P	G

c. Non: quelque soit l'intervalle où la grenade atterrie, la probabilité que le joueur gagne vaut $\frac{1}{2}$.

3) **Non**: quelque soit l'intervalle où la grenade atterrie, la probabilité que le joueur gagne vaut $\frac{2}{n}$.

4) **a.**

- D'après la question 3, si « les humanoïdes » sont placés aléatoirement de façon équiprobable alors les probabilités que le joueur gagne sont égales pour chacun des intervalles où la grenade atterrit.
- L'observation invalide raisonnablement l'égalité des probabilités de gagner pour chacun des intervalles où la grenade atterrit.
- Donc par contraposée, on peut raisonnablement penser que le programme ne place pas aléatoirement « l'humanoïde » derrière les rochers de façon équitable.

b. i. $p = \frac{1}{7}$

ii. Oui car :

- Si la grenade est envoyée en A_1, la probabilité que le joueur gagne est de $2p + p = \frac{3}{7} \approx \frac{301}{698}$
- Si la grenade est envoyée en A_2, la probabilité que le joueur gagne est de $p + p = \frac{2}{7} \approx \frac{200}{704}$
- Si la grenade est envoyée en A_3, la probabilité que le joueur gagne est de $p + p = \frac{2}{7} \approx \frac{197}{695}$
- Si la grenade est envoyée en A_4, la probabilité que le joueur gagne est de $2p + p = \frac{3}{7} \approx \frac{299}{703}$

Situation 2 : choix de $q_1, \dots, q_{n-1}$ en mode expert

1.
- Probabilité que la grenade atterrisse en A_1 et que le joueur gagne : $q_1 \times 2p + q_1 \times p = \frac{3}{n+2} q_1$
- Probabilité que la grenade atterrisse en A_2 et que le joueur gagne : $q_2 \times p + q_2 \times p = \frac{2}{n+2} q_2$
- L'égalité est une conséquence du problème visé.

2. Les situations sont identiques pour les rochers 1 et n puis pour les rochers intermédiaires. Donc $q_1 = q_{n-1}$ et $q_2 = \cdots = q_{n-2}$. Puis on invoque la somme des probabilités égale à 1.

3. En invoquant les questions 1 et 2 (système 2x2) : $q_1 = \frac{2}{3n-5}$ et $q_2 = \frac{3}{3n-5}$

4. Question 3 à interpréter dans le contexte.

Sujet 2 : les nombres étranches

Partie 1 : détermination des nombres étranches

102 ; 1024 ; 10240 ; 705 ; 70520 ; 705204

Partie 2 : recherche des nombres étranches à deux, puis trois chiffres

1. Toute démarche est acceptée.

2. **a.** 0, 1 ou 2.
   b. $n_3 \in \{0\,;3\,;6\,;9\}$.
   c. Sous la forme $3k+1$, $n_3 \in \{2\,;5\,;8\}$.
   Sous la forme $3k+2$, $n_3 \in \{1\,;4\,;7\}$.
   d. 15 nombres étranches de longueur 2 multiples de 3, 15 nombres étranches de longueur 2 égaux à 1 modulo 3 et 15 égaux à 2 modulo 3. Avec la question 2. c. : $15 \times 4 + 15 \times 3 + 15 \times 3 = 150$.
   e. $15 \times 2 + 15 \times 2 + 15 \times 1 = 75$.

3. **a.**

i	m	c
0	**62**	**1**
1	**621**	**2**

   b. $compteur = 1$.
   c. $compteur = 0$.
   d. Cet algorithme teste si un nombre entier à 3 chiffres est étranche.

Partie 3 : Dénombrement des nombres étranches à quatre et cinq chiffres

1. **a)** $\overline{n_1n_2n_3n_4} = \overline{n_1n_2} \times 100 + \overline{n_3n_4} = \overline{n_3n_4} + 4 \times (25 \times \overline{n_1n_2})$.
   b) Utilisation attendue de la définition de la division euclidienne et de « divisible par 4 ».
   c) 15 nombres étranches à 3 chiffres finissent par $n_3 = 0$, 15 autres par $n_3 = 1$, … 15 autres par $n_3 = 9$.
   - Si n_3 est pair, $n_4 \in \{0\,;4\,;8\}$
   - Si n_3 est impair, $n_4 \in \{2\,;6\}$

   Un dénombrement donne exactement $15 \times (5 \times 3 + 5 \times 2) = 375$ nombres étranches à 4 chiffres.
2. Chaque nombre étranche à 4 chiffres peut être complété par 0 ou 5 à droite pour former un nombre étranche à 5 chiffres. On a donc exactement $375 \times 2 = 750$ nombres étranches à 5 chiffres.

Aparté culturelle des concepteurs sur les nombres étranches :
- Il existe un et un seul nombre étranche à 10 chiffres sans répétition : 3816547290
- Il existe exactement 2492 nombres étranches terminaux (dont il est impossible d'adjoindre un chiffre à droite pour former un nouveau nombres étranches plus long).
- La liste des nombres étranches est finie. Le plus grand nombre étranche est 3608528850368400786036725. Il est le seul à s'écrire avec 25 chiffres.
- Pour obtenir cette liste et ce plus grand nombre étranche, on recourt à la programmation informatique. Aucune démonstration mathématique de la finitude de cette liste n'est connue à ce jour.
- Des précautions sont à prendre dans l'écriture de l'algorithme puisque la taille des nombres en jeu pose problème. La calculatrice des élèves (ou même les ordinateurs à architecture 32 bits) ne peuvent stocker les nombres entiers que jusque $2^{32} = 4294967296$.
- Il faut donc recourir à une astuce arithmétique pour décomposer l'entier n testé modulo 23. Ci-après : deux versions algorithmiques informatisées du test du caractère « étranche ». La première fonction

« EstEtranche(n) » traduit fidèlement la définition mathématique (exploitable en classe) ; la seconde fonction « TestEtranche(n) » est adaptée avec cette contrainte architecturale des machines.

```
from math import *

def EstEtranche(n):   #programmation théorique sans tenir compte des problèmes de stockages des entiers au-delà de 2^32
   f=len(str(n))
   Reponse=True
   k=0
   while k<f and Reponse==True:
      if int(n/10**k)%(f-k)>0:
         Reponse = False
      k=k+1
   return Reponse

def TestEtranche(n):   #version décomposant n en nombres inférieurs à 2^32 et travaillant modulo f-k
   f=len(str(n))
   Reponse=True
   k=0
   while k<f and Reponse==True:
      m=int(n/10**10)        # On écrit ici n = m x 10^10 + r pour avoir m, 10^10 et r inférieurs à 2^32
      r=n%10**10
      m=int(m/10**k)
      r=int(r/10**k)
      if m%(f-k)*((10**10)%(f-k))+r%(f-k)>0:
         Reponse = False
      k=k+1
   return Reponse
```