CORRIGE METROPOLE

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

PLUS FORT !

1. ***a.*** $[8, 1, \mathbf{7}, 6, 5, 2, \mathbf{3}, \mathbf{4}]$ est une autre liste de longueur 8 et de score 3.
   b. Les listes de longueurs 3 sont $[1, \mathbf{2}, \mathbf{3}]$, $[1, \mathbf{3}, 2]$, $[2{,}1, \mathbf{3}]$, $[2, \mathbf{3}, 1]$, $[3{,}1, \mathbf{2}]$, $[3{,}2{,}1]$ et les scores associés sont respectivement $2, 1, 1, 1, 1, 0$.

2.

```
def score(L,n):
  '''renvoie le score de la liste L de longueur n'''
  S=0
  for k in range(n-1):
    if L[k+1]>L[k]:
      S=S+1
  return S
```

3. Le score est un nombre positif ou nul et le joueur marque 0 point avec la liste $[n, n-1, \dots, 2{,}1]$.
Dans le meilleur des cas, toutes les cartes sont dans l'ordre croissant et la liste $[1, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}]$ apporte le nombre maximal de points qui est $n-1$.

4. ***a.*** La liste $[1, \mathbf{2}, .., \boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}, n-1, .., k+1]$ a pour score k et est de longueur n donc il existe au moins une liste de longueur n et de score k.

b. La liste $[n-1, .., k+1, 1, \mathbf{2}, .., \boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}]$ est différente de la précédente et donne aussi k points donc, pour tout k entre 1 et $n-2$, on peut trouver deux listes de longueur n et de score k.

5. La première liste donnée dans la question **2**. est la seule de longueur n et de score 0 (les nombres doivent tous être rangés dans l'ordre décroissant. De même, la deuxième liste donnée dans la question **2**. est la seule de longueur n et de score $n-1$, donc $L_n(0) = L_n(n-1) = 1$.

6. a. En appliquant le résulta de la question précédente à $n = 3$, $L_3(0) = L_3(2) = 1$. Les listes de longueurs 3 sont $[1, \mathbf{2}, \mathbf{3}]$, $[1, \mathbf{3}, 2]$, $[2{,}1, \mathbf{3}]$, $[2, \mathbf{3}, 1]$, $[3{,}1, \mathbf{2}]$, $[3{,}2{,}1]$ et on en déduit $L_3(1) = 4$.
On remarque que $[3{,}1, \mathbf{2}]$ rapporte 1 point. Parmi les 4 possibilités d'insertion du 4, les listes dont le score est toujours 1 sont $[\mathbf{4}, 3{,}1{,}2]$ et $[3{,}1, \mathbf{4}, 2]$.

b. La liste $[3{,}2{,}1]$ a pour score 0. On obtient une liste ayant encore le score 0 uniquement en insérant le n°4 au début, ce qui donne la liste $[\mathbf{4}, 3{,}2{,}1]$.

c. Toute liste de longueur 4 et de score 1 ne peut être obtenue que par insertion du n°4 dans une liste de longueur 3 et de score 0 ou 1. En effet, insérer 4 à la liste $[1, \mathbf{2}, \mathbf{3}]$ donnera une liste de score 2 au moins.
Pour chaque liste de longueur 3 et score 1, il y a deux possibilités d'insertion du n°4, ce qui fait 2 $L_3(1)$ telles listes possibles. À cela on ajoute les 3 possibilités obtenues à partir de la liste de longueur 3 et score 0, ce qui ajoute 3 $L_{\mathbf{3}}(0)$ listes possibles. On obtient donc bien $L_4(1) = 2L_3(1) + L_3(0)$.

d. On construit une liste de longueur $n+1$ et score 1 à partir d'une liste de longueur n et score 0 ou 1, en insérant le n° $n+1$ judicieusement. Remarquons d'abord que la position 1 ne rapporte pas de point.
Dans une liste de longueur n et score 1, on peut insérer le n° $n+1$ soit au tout début (en position 1), soit juste avant le numéro marquant l'unique point (position au moins 2). Ces deux positions sont distinctes, et ce sont les seules possibles, ce qui fait 2 $L_{\boldsymbol{n}}(1)$ listes de ce type.

Dans une liste de longueur n et de score 0, on peut insérer le n° $n+1$ n'importe où sauf au tout début, la liste obtenue rapportera bien 1 point. Il y a donc n positions possibles pour ce numéro $n+1$, ce qui fait $n\,L_{\boldsymbol{n}}(0)$ listes de ce type.
Enfin, insérer $n+1$ à une liste de longueur n et de score supérieur ou égal à 2 donnera une liste de score supérieur ou égal à 2 : en effet, si on l'insère en queue, cela augmentera le score d'une unité, et sinon, cela conservera le score initial.
On trouve donc bien $L_{n+1}(1) \ = 2L_n(1) + nL_n(0)$.

e. On a $L_{n+1}(k) = (k+1)L_{\boldsymbol{n}}(k) + (n+1-k)L_{\boldsymbol{n}}(k-1)$. En effet :

- Si on insère le n° $n+1$ dans une liste de longueur n et score k, la nouvelle liste a encore un score de k si et seulement si l'insertion s'est faite en position 1, ou juste avant un numéro qui marquait un point, ce qui fait $k+1$ possibilités.
- Si on insère le n° $n+1$ dans une liste de longueur n et score $k-1$, la nouvelle liste a un score de k si et seulement si l'insertion s'est faite dans l'une des positions non évoquées ci-dessus, ce qui donne $n+1-k$ possibilités.
- Enfin, comme précédemment, insérer $n+1$ à une liste de score strictement inférieur à $k-1$, ou strictement supérieur à k, ne conduira jamais à une nouvelle liste de score k.

f. On obtient, grâce aux questions précédentes :

	$\boldsymbol{k=0}$	$\boldsymbol{k=1}$	$\boldsymbol{k=2}$	$\boldsymbol{k=3}$	$\boldsymbol{k=4}$
$\boldsymbol{n=3}$	1	4	1		
$\boldsymbol{n=4}$	1	11	11	1	
$\boldsymbol{n=5}$	1	26	66	26	1

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

UNE DESCENTE INFINIE

Partie 1.

1. $b = -(r_1 + r_2)$ et $c = r_1 r_2$.
2. $c \geq 0$ donc $r_1$et r_2 sont de même signe. $b \leq 0$ est négatif donc la somme de $r_1$et r_2 est positive. On en déduit donc que $r_1$et r_2 sont positifs.

Partie 2.

1. ***a.*** Comme (x_1, x_2, x_3) solution de l'équation (1), on a $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha x_1 x_2 x_3$.
   Or $\alpha > 0$ et $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$ donc $x_1 x_2 x_3 \geq 0$.
   Ainsi $|x_1||x_2||x_3| = |x_1 x_2 x_3| = x_1 x_2 x_3$ et $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est aussi solution de l'équation (E).
   b. Si (x_1, x_2, x_3) est triplet d'entiers relatifs différent de $(0,0,0)$ solution de l'équation (1), alors d'après la question précédente, $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ solution triplet d'entiers naturels de l'équation (1) différent de $(0,0,0)$.
2. Par commutativité du produit et de la somme, le triplet (x_2, x_1, x_3) est alors aussi solution de l'équation (E).
3. Si l'équation (E) admet une solution (x_2, x_1, x_3) différente de $(0,0,0)$, d'après la question 1b., on obtient un triplet de nombres entiers naturels différents de $(0,0,0)$ et solution de (E). Puis, d'après la question 2., en et en la généralisant d'autres permutations du triplet), on obtient une solution (x_1, x_2, x_3) différente du triplet $(0,0,0)$ telle que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

Partie 3.

1. On sait déjà que $x_1 \geq 0$. Si $x_1 = 0$, alors le membre de droite de l'égalité est nul et donc $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, les x_i sont donc tous nuls et la seule solution est le triplet $(0,0,0)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
2.
   a. (x_1, x_2, y) est solution si et seulement si $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = \alpha x_1 x_2 y$ c'est-à-dire y est racine de Q.
   b. x_3 est une racine de Q.
   c. On écrit $Q(x_2) = (x_2^2 - \alpha x_1 x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2) = (2x_2^2 + x_2^2 - \alpha x_1 x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2 - 2x_2^2)$ d'où le résultat.
   On sait que x_1, x_2 sont des entiers non nuls donc supérieurs ou égaux à 1, d'où $3 - \alpha x_1 x_2 \leq 3 - \alpha < 0$ et $x_2^2 > 0$ donc $(3 - \alpha x_1 x_2)x_2^2 < 0$ et on a $0 < x_1 \leq x_2$ donc donc $x_1^2 - x_2^2 \leq 0$.
   D'où en sommant $Q(x_2) < 0$.
   d. $Q(0) = x_1^2 + x_2^2$ et $0 < x_1 \leq x_2$ donc $Q(0) > 0$.
   e. $Q(x_2) < 0$ donc la fonction polynôme du second degré Q change se signe sur **R**. On en déduit que l'équation $Q(x) = 0$ possède exactement deux solutions distinctes réelles. On connaît x_3. On note y l'autre solution.
   La fonction polynôme Q est positive à l'extérieur des racines et négative à l'intérieur. Donc, comme $Q(x_2) < 0$, x_2 est entre ces racines (strictement). Comme $x_2 \leq x_3$, on en déduit que $y < x_2 < x_3$.
   On sait que $Q(0) > 0$, donc 0 est à l'extérieur des racines donc soit inférieur strictement à y soit strictement supérieur à x_3. Mais comme $0 < x_2$, on en conclut que $0 < y < x_2 < x_3$.
   f. D'après la partie **1.**, $y + x_3 = \alpha x_1 x_2$ qui est un entier comme produit d'entiers. Comme $x_3$est un entier, y est un entier. Il est naturel d'après la question **e.**.
3. En réitérant ce procédé sur le triplet (x_1, x_2, y) (réordonné dans l'ordre croissant) au lieu de (x_1, x_2, x_3), on obtient un triplet d'entiers distincts de (0,0,0) dont le max a encore strictement décru .
   On obtient ainsi une suite strictement décroissante d'entier naturels y_n, ce qui est impossible. Ainsi, il n'existe pas de triplet d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3) différent de (0,0,0), solution de (E) tel que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.
4. Par l'absurde, s'il existait un triplet d'entiers relatifs (x_1, x_2, x_3) différent de (0,0,0), solution de (E), alors, d'après la question **3.** de la partie 2, il existerait un triplet d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3) différent de (0,0,0), solution de (E) tel que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, ce qui est impossible d'après la question précédente.
5. On généralise le raisonnement en considérant d'abord le polynôme $Q(x) = x^2 - \alpha x_1 \dots x_{n-1} x + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2$, en montrant que $Q(x_{n-1}) = (n - \alpha x_1 \dots x_{n-2}) x_{n-1}^2 + (x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 - (n-2)x_{n-1}^2)$ d'où on déduit $Q(x_{n-1}) > 0$ alors qu'on a $Q(0) > 0$.

Exercice 3 (à traiter par les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

CODES DÉTECTEURS ET CORRECTEURS

Question préliminaire

1. Si a et b sont tous les deux pairs, alors il existe deux entiers k et l tels que $a = 2k$ et $b = 2l$ d'où $a + b = 2(k + l)$ et $a + b$ est pair.
Si a et b sont tous les deux impairs, alors il existe deux entiers k et l tels que $a = 2k + 1$ et $b = 2l + 1$ d'où $a + b = 2(k + l + 1)$ et $a + b$ est pair.
Réciproquement, si a est pair et b est impair, alors il existe deux entiers k et l tels que $a = 2k$ et $b = 2l + 1$ d'où $a + b = 2(k + l) + 1$ et $a + b$ est impair. Le raisonnement est le même si a est impair et b est pair.
Le nombre $a + b$ est donc bien pair si et seulement si a et b sont de même parité.

Codage d'un message

2. ***a***. Le quadruplet $(1,0,0,1)$ code le message $M = 1 + 8 = 9$.
b. $10 = 2 + 8$ donc le quadruplet $(0,1,0,1)$ code le message $M = 10$ et $15 = 1 + 2 + 4 + 8$ donc le quadruplet $(1,1,1,1)$ code le message $M = 15$.
c. On ne peut trouve r de code pour représenter $M = 20$ car le plus grand message est celui obtenu avec le quadruplet $(1,1,1,1)$soit 20.
d. Les différents messages possibles sont : $0, 1, 2, 3, \dots, 15$ soit tous les entiers de 0 à 15.

Codage d'un message avec protection contre les erreurs.

3. ***a.*** $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 1 = 2$ qui est pair donc $y = 0$.
b. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 1 + 1 = 3$, qui est impair. On devrait donc avoir $y = 1$. Le code a donc été corrompu.
c. Dans le cas où un seul bit est faux, on peut détecter l'altération puisque si l'on change la parité d'un seul terme d'une somme, on change la parité de la somme mais on ne peut la localiser parmi les trois termes de la somme.
Dans le cas où deux bits sont faux, on ne pourra pas détecter l'altération d'après la question préliminaire.

4. ***a.*** $x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 0 + 0 = 1$ qui est impair donc $y_1 = 1$, $x_2 + x_3 + x_4 = 0 + 0 + 1 = 1$, qui est impair donc $y_2 = 1$ et $x_1 + x_3 + x_4 = 1 + 0 + 1 = 2$ qui est pair donc $y_3 = 0$.
b. Pour le quadruplet $(1,1,0,1,0,0,1)$, on a bien $y_1 = 0$ car $x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 1 + 0 = 2$ qui est pair et $y_2 = 0$ car $x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 0 + 1 = 2$ qui est pair mais $x_1 + x_3 + x_4 = 1 + 0 + 1 = 2$ qui est pair et on devrait donc avoir $y_3 = 0$ ce qui n'est pas le cas. On est donc certain d'une altération de transmission pour l'heptuplet $(1,1,0,1,0,0,1)$.
c. Si on est sûr de la justesse des bits de contrôles, et dans le cas où un seul des bits d'information est erroné, nécessairement deux des sommes $x_1 + x_2 + x_3$, $x_2 + x_3 + x_4$, $x_1 + x_3 + x_4$ ont une mauvaise parité par rapport aux y_1, y_2, y_3. Le bit d'information à changer est celui qui ne figure pas dans la somme ayant la bonne parité.
Si on est sûr de la justesse des bits de contrôles, et dans le cas où exactement deux des quatre bits d'information sont erronés, leur somme a pour autant la bonne parité (puisqu'on ne change pas la parité d'une somme de deux entiers si on change la parité de ces deux entiers). Les deux bits d'information à changer sont donc ceux qui figurent ensemble dans la somme ayant la bonne parité mais seuls dans chacune des autres sommes.

CORRIGE académique

ENCERCLEMENTS

Question 1

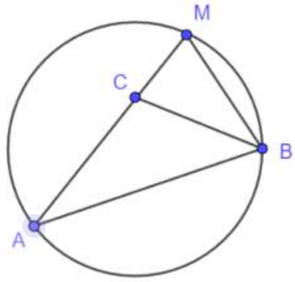
$D_{min}(A, B)$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Question 2 :

2)a) Avec O, milieu de $[AB]$ et $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}$; on obtient $\widehat{AMB} = 90°$. Cqfd

2)b) On a $\widehat{ABM} + \widehat{BAM} + \widehat{AMB} = 180$
$\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180$
$\widehat{BAM} = \widehat{BAC}$
$\widehat{ABC} < \widehat{ABM}$

Donc $\widehat{ACB} > \widehat{AMB}$



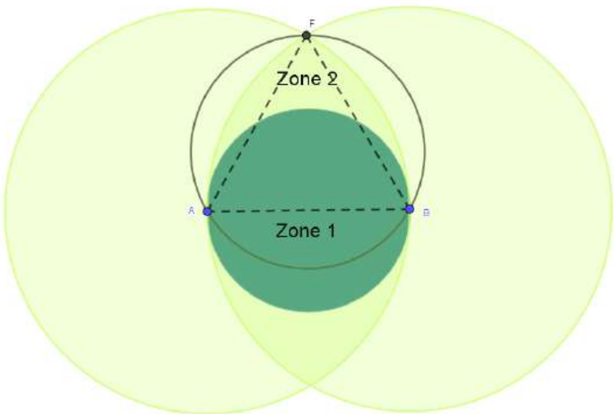
Question 3 :

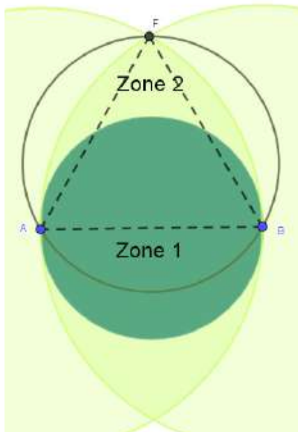
$P_1 \Leftrightarrow P_2$: $\frac{sin\,(\hat{C}\,)}{c} = \frac{\sin(\hat{A})}{a}$ donc $\sin(\hat{C}) \geq \sin(\hat{A}) \;\Leftrightarrow c \geq a$ .Idem pour b et sin $(\hat{B})$ car tous les sinus sont positifs.

$P_2 \Leftrightarrow P_3$: Soit $\hat{C} < 90°$ et par la croissance du sinus sur $[0;\ 90]$
$\sin(\hat{C}) \geq \sin(\hat{A}) \Leftrightarrow \hat{C} \geq \hat{A}$.
Idem pour $\hat{B}$ et sin $(\hat{B})$
Soit $\hat{C} > 90°$ et alors $\hat{C}$ est le plus grand des 3 angles car $\hat{A} + \hat{B} < 90°$.
De plus, $\hat{A} + \hat{B} = 180 - \hat{C}$. Donc, comme $\sin(180 - \hat{C}) = \sin\,(\hat{C})$, on obtient $\sin\,(\hat{A}) \leq \sin\,(\hat{C})$ ce qui équivaut à $\hat{C} \geq \hat{A}$. Idem pour $\hat{B}$ et sin $(\hat{B})$

Question 4 :

Il faut que $AC \leq AB$ et $BC \leq AB$ donc C est, à la fois dans les cercles de centres A et B de rayon AB.
D'où la figure suivante et la partie Z, qui est l'union des zones vertes foncées (zone 2 dans les questions suivantes) et bleue (zone 1 dans les questions suivantes) .





Partie Z zoomée

Question 5 :

5)a) D'après la loi des sinus, et la question 3 le plus grand angle est opposé au plus grand côté. AB étant le plus grand côté, c'est l'angle $\hat{C}$ qui est le plus grand des 3. On a donc forcément $\hat{C} \geq 60°$, sinon la somme des 3 angles du triangle n'atteint pas 180°.

5)b) Si $\hat{C} = 60°$, puisque $\hat{A} \leq 60°$ et $\hat{B} \leq 60°$, pour que la somme soit égale à 180°, la seule possibilité est que $\hat{A} = \hat{B} = 60°$, donc ABC est équilatéral.

Question 6 :

6)a) Si $\widehat{ACB} = 90°$, alors d'après le théorème de l'angle au centre, on a $\widehat{AOB} = 180°$, donc $[AB]$ est un diamètre du cercle.

6)b) D'après la question 2)b), avec M sur le cercle de diamètre $[A⍰]$ et C à l'intérieur du cercle, on obtient le résultat souhaité.

6)c) Figure à ajouter

Question 7 :

7)a) Si A, B, C sont alignés avec A et B les points les plus éloignés, forcément C appartient au segment $[AB]$.

7)b) $D_{min}(A, B, C)$ est alors le cercle de diamètre $[AB]$, car il est le plus petit contenant A et B et contient C car il contient tous les points de son diamètre $[AB]$.

Question 8 :

8)a) $[AB]$est le plus long côté, donc d'après la question 5)a), on a $\hat{C} \geq 60°$. 2 cas sont alors possibles :

Soit $60 \leq \hat{C} \leq 90$ et alors C est dans la zone 2.

Soit $\hat{C} \geq 90$ et alors C est dans la zone 1.

8)b) Si $\hat{C} \geq 90$, alors C est à l'intérieur du cercle de diamètre $[AB]$ et alors $D_{min}(A, B, C)$ est alors le cercle de diamètre $[AB]$.

8)c) Si $60 \leq \hat{C} \leq 90$, alors C est dans la zone 2, à l'extérieur du cercle de diamètre $[AB]$. Donc ce dernier, ne contenant pas C, le cercle de diamètre $[AB]$ n'est pas $D_{min}(A, B, C)$.

On construit des cercles passant par A et B dont le centre est situé sur la médiatrice de $[AB]$ au-dessus de son milieu et dont le rayon grandit progressivement. Le premier cercle contenant les 3 points est celui qui passe par C. Dans ce cas, on a donc $D_{min}(A, B, C)$ qui est le cercle circonscrit au triangle ABC.

Question 9 :

$D_{min}(A, B, C)$ est	Lorsque C est placé ….	On a alors l'angle $\hat{C}$…
Le disque de diamètre $[AB]$	A l'intérieur du cercle de diamètre : zone 1.	Est tel que $\hat{C} \geq 90$
Le disque circonscrit au triangle ABC	Dans la zone 2.	Est tel que $60 \leq \hat{C} \leq 90$
Le disque qui est à la fois circonscrit au triangle ABC et de diamètre $[AB]$	Sur le cercle de diamètre $[AB]$	Est tel que $\hat{C} = 90$

Question 10 :

10)a) Sur les figures 2 à 6, $D_{min}(A, B, C, D)$ est le cercle en pointillés.

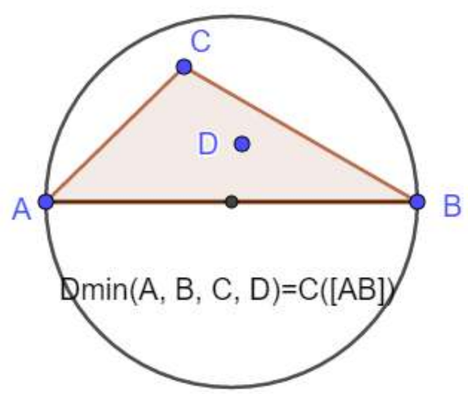


Figure 1

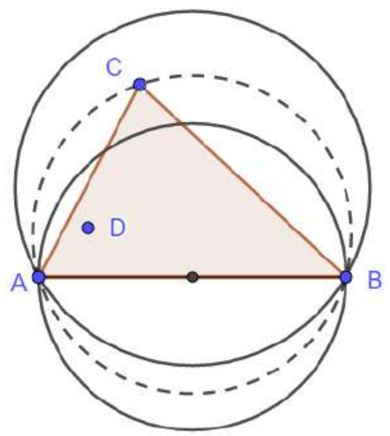


Figure 2

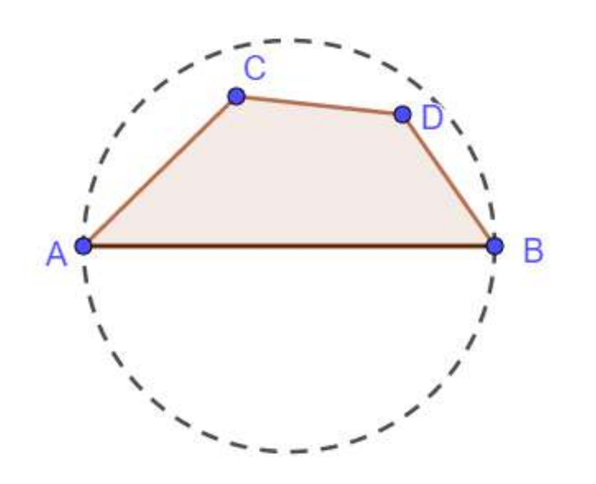


Figure 3

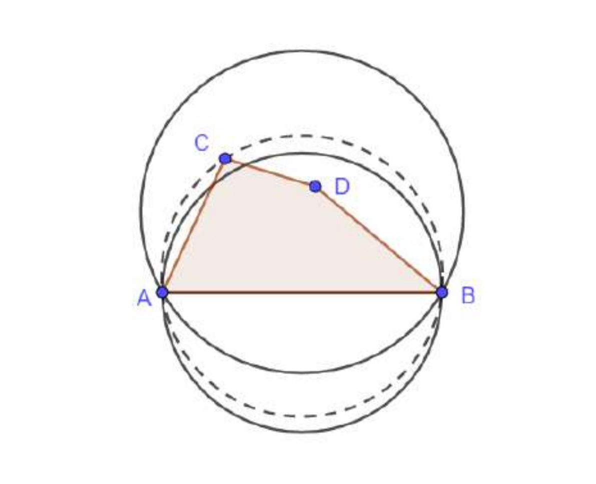


Figure 4

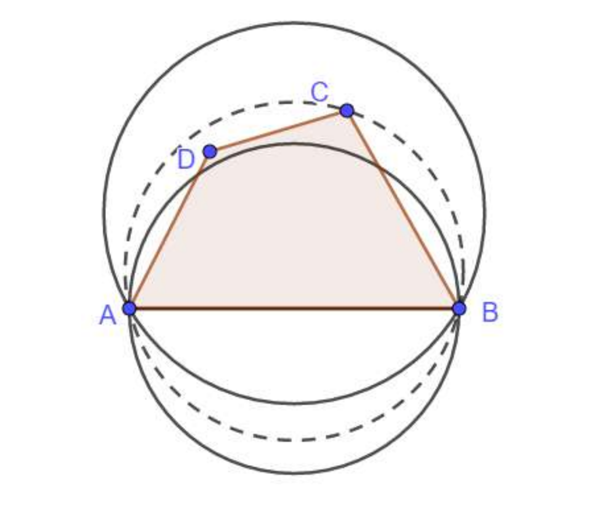


Figure 5

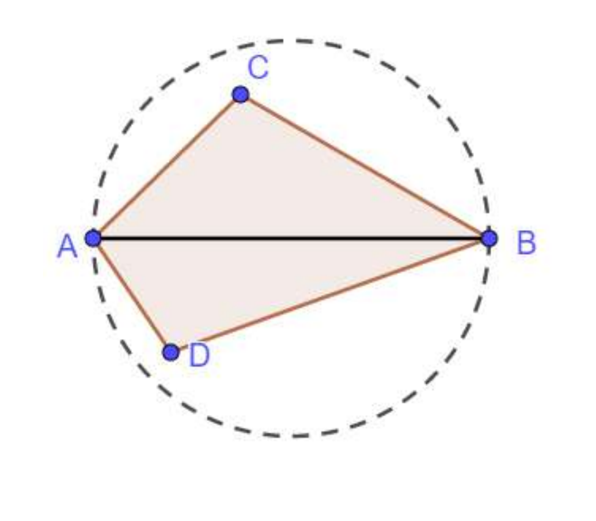


Figure 6

10)b)

Figure	Polygone englobant à 3 ou 4 sommets	Position de C et D (Zone 1 ou Zone 2)	$D_{min}(A, B, C, D)$.
Figure 1	3 sommets A, B, C	C et D en zone 1	Cercle de diamètre $[AB]$
Figure 2	3 sommets A, B, C	C en zone 2 D en zone 1	Cercle circonscrit à ABC
Figure 3	4 sommets	C et D en zone 1	Cercle de diamètre $[AB]$
Figure 4	4 sommets	C en zone 2 D en zone 1	Cercle circonscrit à ABC
Figure 5	4 sommets	C et D en zone 2	Cercle circonscrit à ABC

10)c) La figure 6 diffère des 5 autres par le fait que C et D ne sont pas du même côté de (AB)
10)d) Dans la figure 6, C et D sont dans la zone 1, des deux côtés de (AB).

Les situations non traitées sont celles où C et D ne sont pas du même côté de (AB) avec soit les deux points en zone 2, soit l'un en zone 1 et l'autre en zone 2.

LE LEMME DE SPERNER

Partie 1 : Portes d'une ligne discolorée

Question 1

- ☞ Le Graphe 1 contient 3 couleurs différentes et non 2.
- ☞ Le Graphe 2 contient des sommets aux extrémités de même couleur.
- ☞ Le Graphe 3 n'est pas une ligne.

Question 2

A vérifier au cas par cas.

Question 3

En traçant la ligne bicolorée, une porte correspond exactement à un changement de couleur des sommets tracés par la suite. Ainsi, pour que les sommets aux extrémités soient de couleurs différentes, il faut et il suffit d'un nombre impair de changements de couleur et donc d'un nombre impair de portes.

Partie 2: COLORATION De SPERNER d'une triangulation d'un triangle

Question 4a) & 4b)

A vérifier au cas par cas.

Partie 3: Lemme de SPERNER de dimension 2

Question 5a)

A vérifier au cas par cas.

Question 5b)

Le dernier petit triangle visité a 3 sommets de couleurs distinctes.

Question 6

D'après la question 3, il existe un nombre impair de portes sur chacun des 3 côtés du triangle (qui est une ligne bicolorée par définition). Or, la somme de 3 nombres impairs est impaire. Donc les côtés du triangle T possèdent au total un nombre impair de portes.

De plus, une entrée suivie d'une sortie constitue une fermeture de 2 portes. Ce processus ferme donc un nombre pair de portes.

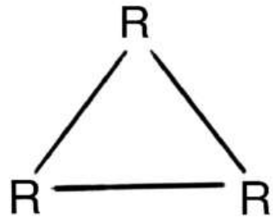
Il restera alors toujours une porte ouverte de libre pour entrer à nouveau dans le triangle T.

Question 7

Le processus de la question 6 se finit forcément par une entrée dans T avec toutes ses portes fermées sur le côté. Le nombre de triangles de la triangulation étant fini, le parcours finira donc par être piégé dans le triangle T et s'arrêtera dans un des petits triangles.

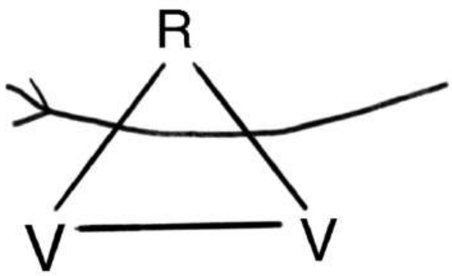
Question 8 a)

Initialement, un petit triangle qui ne peut pas être visité par la parcours est un triangle dont toutes les portes sont fermées. Autrement dit, tous ses sommets sont de la même couleur.
Exemple :



Question 8 b)

Ce type de petits triangles contient exactement 2 portes ouvertes initialement.
Il a donc 2 sommets de même couleur et le 3ème d'une autre couleur.
Exemple :

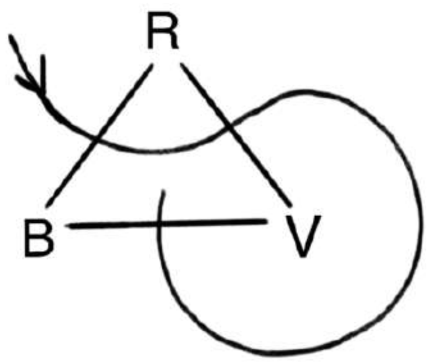


Question 8 c)

Un tel petit triangle doit contenir une et une seule porte ouverte pour piéger le parcours une fois qu'il y entre. Or, initialement, ce n'est pas possible. En effet, dès qu'une porte est ouverte (par exemple B-V), une disjonction de cas sur la couleur du 3ème sommet n'aboutie jamais à une et une seule porte ouverte sur le petit triangle :

- Si le 3ème sommet est B (coloration : B-V-B), il existe exactement 2 portes ouvertes.
- Si le 3ème sommet est V (coloration : B-V-V), il existe exactement 2 portes ouvertes.
- Si le 3ème sommet est R (coloration : B-V-R), il existe exactement 3 portes ouvertes.

Dans les 2 premiers cas, on se ramène à la question 8) b).
Dans le dernier cas, il est possible de piéger le parcours à condition qu'il visite 2 fois le petit triangle comme suit :



Question 9

Lorsque l'on suit le parcours, les questions 6 et 7 nous montrent que le parcours prend toujours fin à l'intérieur de T (dans un petit triangle).

La question 8 nous montre que le seul type de petits triangles qui peut piéger le parcours est un petit triangle dont les 3 sommets sont de couleurs différentes.

L'existence d'un triangle aux sommets de couleurs différentes est donc une condition nécessaire au caractère fini du parcours, assuré par la question 7.

Question 10

Un carré possède 4 côtés. Ainsi, le raisonnement de la question 6 n'est plus assuré. Le contour du carré possède 4 fois un nombre impair de portes et donc un total de portes paires. Ainsi, il est possible que le parcours sorte du carré et qu'il n'y ait plus de portes ouvertes pour entrer à nouveau dans le carré triangulé. Le parcours peut donc prendre fin à l'extérieur du carré. Ceci n'assure pas le fait d'être piégé dans un petit triangle et donc l'existence d'un triangle aux sommets de couleurs différentes.

Contre-exemple :
Voici un carré triangulé muni d'une coloration de Sperner. Il ne contient aucun petit triangle dont les 3 sommets ont des couleurs différentes.
On y fait aussi figurer l'exemple d'un parcours piégé à l'extérieur du carré.